

Quantenmechanik und Gruppentheorie.

Von H. Weyl in Zürich.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 13. Oktober 1927.)

Einleitung und Zusammenfassung. — I. Teil. Bedeutung der Repräsentation von physikalischen Größen durch Hermitesche Formen. § 1. Mathematische Grundbegriffe, die Hermiteschen Formen betreffend. § 2. Der physikalische Begriff des reinen Falles. § 3. Die physikalische Bedeutung der repräsentierenden Hermiteschen Form. § 4. Statistik der Gemenge. — II. Teil. Kinematik als Gruppe. § 5. Über Gruppen und ihre unitären Darstellungen. § 6. Übertragung auf kontinuierliche Gruppen. § 7. Ersatz der kanonischen Variablen durch die Gruppe. Das Elektron. § 8. Übergang zu Schrödingers Wellentheorie. — III. Teil. Das dynamische Problem. § 9. Das Gesetz der zeitlichen Veränderung. Die Zeitgesamtheit. § 10. Kinetische Energie und Coulombsche Kraft in der relativistischen Quantenmechanik. — Mathematischer Anhang.

Einleitung und Zusammenfassung.

In der Quantenmechanik kann man zwei Fragen deutlich voneinander trennen: 1. Wie komme ich zu der Matrix, der Hermiteschen Form, welche eine gegebene Größe in einem seiner Konstitution nach bekannten physikalischen System repräsentiert? 2. Wenn einmal die Hermitesche Form gewonnen ist, was ist ihre physikalische Bedeutung, was für physikalische Aussagen kann ich ihr entnehmen? Auf die zweite Frage hat v. Neumann in einer kürzlich erschienenen Arbeit* eine klare und weitreichende Antwort gegeben. Aber sie spricht noch nicht alles aus, was sich darüber sagen läßt, umfaßt auch nicht alle Ansätze, die bereits in der physikalischen Literatur mit Erfolg geltend gemacht worden sind. Ich glaube, daß ich in dieser Hinsicht zu einem gewissen Abschluß gelangt bin durch die Aufstellung des Begriffs des reinen Falles**. Ein reiner Fall von Atomen z. B. liegt dann vor, wenn der betrachtete Atomschwarm den höchsten Grad von Homogenität besitzt, der sich realisieren läßt. Der monochromatische polarisierte Lichtstrahl ist ein Beispiel aus anderem Gebiet. Der reine Fall wird repräsentiert durch die Variablen der Hermiteschen Form; die Form selber gibt Aufschluß darüber, welcher Werte die durch sie repräsentierte Größe fähig ist, und mit welcher Wahrscheinlichkeit oder Häufigkeit diese Werte in irgend

* Mathematische Begründung der Quantenmechanik, Nachr. Gesellsch. d. Wissensch. Göttingen 1927, S. 1.

** Wie mir Herr v. Neumann mitteilt, ist auch er inzwischen zur Aufstellung dieses Begriffs gelangt [Zusatz bei der Korrektur].

einem vorliegenden reinen Fall angenommen werden. Auf diese Theorie des reinen Falles gründet sich erst die Statistik der Menge; v. Neumanns Ansatz bezog sich lediglich auf eine bestimmte Frage in diesem Gebiet.

Der II. Teil handelt von der tiefer greifenden Frage 1. Sie hängt aufs engste zusammen mit der Frage nach dem Wesen und der richtigen Definition der kanonischen Variablen. Ein Versuch in dieser Richtung, der das Problem erst in seiner wahren Allgemeinheit hervortreten ließ, ist von Herrn Jordan unternommen worden*. Doch enthalten seine Entwicklungen eine ernstliche Lücke — indem aus seinen Definitionen und Axiomen nicht hervorgeht, daß einer Funktion $f(q)$ der Lagekoordinaten q diejenige Matrix $f(Q)$ zugeordnet ist, die nach dem gleichen Funktionsgesetz aus den q repräsentierenden Matrizen Q gebildet ist; geschweige denn, daß etwas Derartiges für Funktionen der Lage- und Impulskoordinaten geleistet würde. Ohne einen solchen Zusatz ist aber sein Schema inhaltsleer. Außerdem ist seine Fassung des Begriffs der kanonischen Variablen mathematisch unbefriedigend und physikalisch nicht haltbar. Hier glaube ich mit Hilfe der Gruppentheorie zu einer tieferen Einsicht in den wahren Sachverhalt gelangt zu sein**. Der innere prinzipielle Grund für die kanonische Paarung tritt dadurch deutlich hervor, die sich einstellt, wenn die zugrunde liegende Gruppe eine kontinuierliche ist; aber der Ansatz umspannt zugleich die diskreten Fälle wie das magnetische Elektron (Vierergruppe), wo von einer kanonischen Paarung vernünftigerweise nicht mehr die Rede sein kann. Im kontinuierlichen Gebiet mache ich gegenüber dem differentiellen den integralen Standpunkt geltend, indem ich überall die infinitesimale Gruppe, an welche die Formulierung bisher sich klammerte, durch die volle kontinuierliche Gruppe ersetze. Der Übergang zu Schrödingers Wellengleichungen läßt sich dann in aller Strenge vollziehen. Als weiteren Erfolg meines Ansatzes möchte ich anführen, daß er gestattet, den Funktionalausdruck einer Größe wie etwa der Energie durch die

* Über eine neue Begründung der Quantenmechanik, ZS. f. Phys. **40**, 809, 1927; **44**, 1, 1927. Vgl. ferner P. A. M. Dirac, Proc. Royal Soc. (A) **113**, 621, 1927, und D. Hilbert, J. v. Neumann, L. Nordheim, Über die Grundlagen der Quantenmechanik, Math. Ann. **98**, 1, 1927.

** Diese Verknüpfung mit der Gruppentheorie liegt in ganz anderer Richtung als die Untersuchungen von Herrn Wigner, die erkennen lassen, daß die Struktur der Spektren nach ihrer qualitativen Seite hin durch die bestehende Symmetriegruppe bestimmt ist (mehrere Arbeiten in der ZS. f. Phys. **40**, 492 und 883; **43**, 624, 1926/1927).

kanonischen Variablen nach einer eindeutigen Vorschrift auf die Matrizen zu übertragen, um was für Funktionen es sich auch handeln mag; während die bisherige Fassung sich ernstlich nur auf Polynome bezog und auch dann noch dahingestellt bleiben mußte, ob man ein Monom wie p^2q im Matrizenkalkül als p^2q oder qp^2 oder pqp oder als eine Kombination von dem allen zu interpretieren hatte.

Die Durchführung konkreter Fälle verlangt die Lösung des dynamischen Problems. Das ist wohl im Grunde die Aufgabe, unter den Größen des Gruppengebiets diejenigen zu ermitteln, welche den gemessenen Ort und die gemessene Zeit bedeuten. Hier liegt ein Schema bisher nur für den Fall vor, daß die Zeit als einzige unabhängige Veränderliche auftritt (Ausschluß der Feldtheorie) und daß die Zeit auch nur als unabhängige Variable, nicht als reale Zustandsgröße vorkommt (Ausschluß der eigentlichen Relativitätsmechanik). Dennoch läßt sich wenigstens der relativistische Ansatz der kinetischen Energie ohne weiteres in die Quantenmechanik übertragen. Ich behandle diese Dinge im letzten Kapitel mehr zur Illustration der allgemeinen Theorie. Die Analoga der Schrödingerschen Schwingungsgleichungen sind dabei keine eigentlichen Differentialgleichungen, sondern an Stelle der gewöhnlichen Differentiation treten differentiationsartige Prozesse.

Über die benötigten mathematischen Begriffe und Tatsachen habe ich in eingeschobenen Absätzen kurz referiert. In einem Anhang sind die wichtigsten mathematischen Fundamente der Theorie durch Beweise gestützt worden. Dem physikalischen Leser hoffe ich damit mehr zu dienen als mit Hinweisen auf die mathematische Literatur, die ihm das hier Erforderliche meist nur in Verschlingung mit anderen, ihn nicht interessierenden Dingen bietet.

I. Teil. Bedeutung der Repräsentation von physikalischen Größen durch Hermitesche Formen.

§ 1. Mathematische Grundbegriffe, die Hermiteschen Formen betreffend. Die in der Überschrift angekündigten Grundbegriffe und -tatsachen stelle ich hier in der Nomenklatur der mehrdimensionalen analytischen Geometrie kurz zusammen. Das Abweichende von der gewöhnlichen n -dimensionalen Geometrie liegt darin, daß die Komponenten der Vektoren

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

nicht nur reelle, sondern beliebige komplexe Zahlen sein können, und daß als Quadrat des Betrages eines Vektors dementsprechend die „Hermitesche Einheitsform“

$$|\xi|^2 = x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_n \bar{x}_n \quad (2)$$

der Metrik zugrunde liegt (der Querstrich bedeutet den Übergang zur konjugiert komplexen Zahl). Vektoren (1) werden in der üblichen Weise mit Zahlen multipliziert und addiert. Sie bilden eine n -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit, den Vektorraum oder Vektorkörper \mathfrak{R}_n ; d. h. es lassen sich auf mancherlei Art n Vektoren $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*$ so auswählen, daß jeder Vektor ξ auf eine und nur eine Weise in der Form

$$\xi = x_1^* e_1^* + x_2^* e_2^* + \dots + x_n^* e_n^*$$

sich darstellen läßt. Wird z. B. e_i^* als der Vektor $e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ gewählt (1 steht an i -ter Stelle), so fallen die „Komponenten x_i^* “ von ξ in bezug auf das Koordinatensystem $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ “ mit den „absoluten Komponenten“ x_i zusammen. Ein Koordinatensystem, in welchem das Quadrat des Betrages von ξ sich durch die Komponenten x_i des willkürlichen Vektors ξ mittels der Formel (2) ausdrückt, heiße normal. Alle normalen Koordinatensysteme sollen als gleichberechtigt gelten, das durch unseren arithmetischen Ausgangspunkt bedingte spezielle Koordinatensystem (e_i) soll unter ihnen seine ausgezeichnete Stellung verlieren. In Zukunft bedeutet daher auch e_i ein beliebiges normales Koordinatensystem, x_i die darauf bezüglichen Komponenten des Vektors ξ . Die Formeln für den Übergang vom Koordinatensystem e_i zu einem anderen e_i' lauten allgemein:

$$e_i' = \sum_k e_{ik} e_k, \quad x_k = \sum_i e_{ik} x_i'. \quad (3)$$

Die Bedingungen, welche die Koeffizienten e_{ik} erfüllen müssen, damit eine „unitäre Transformation“ vorliegt, welche zwischen zwei normalen Koordinatensystemen vermittelt, sind leicht aus der Definition zu ermitteln und entsprechen genau den aus der elementaren analytischen Geometrie geläufigen. Wenn wir mit E die Matrix $\|e_{ik}\|$ bezeichnen und der * das Transponieren einer Matrix, die Vertauschung von Zeilen und Spalten bedeutet, $\mathbf{1}$ aber die die Identität darstellende Einheitsmatrix, so lauten sie:

$$E \bar{E}^* = \bar{E}^* E = \mathbf{1}.$$

Die Formeln (3) oder, wie ich jetzt lieber schreiben will:

$$x_k' = \sum_i e_{ik} x_i \quad (4)$$

haben bekanntlich noch eine zweite Bedeutung; sie stellen, unter Zugrundelegung des festen normalen Koordinatensystems der e_i , eine unitäre Abbildung des Vektorraumes auf sich selber dar, vermöge deren dem Vektor $\xi = \sum x_i e_i$ der Vektor $\xi' = \sum x'_i e_i$ zugeordnet wird. Ich bezeichne diese Abbildung kurz mit $\xi' = \xi E$. Dann drückt sich die Zusammensetzung zweier Abbildungen

$$\xi' = \xi E, \quad \xi'' = \xi' E'$$

naturgemäß durch $\xi'' = \xi (EE')$ aus — E, E' folgen sich von links nach rechts, wie wir zu lesen gewohnt sind —, und man befindet sich in Einklang mit der üblichen Festsetzung des Matrizenkalküls, nach welcher aus

$$E = \|e_{ik}\|, \quad E' = \|e'_{ik}\|$$

durch Komposition die Matrix EE' mit den Koeffizienten

$$\sum_r e_{ir} e'_{rk}$$

entsteht. Der geometrische Standpunkt kommt darauf hinaus, daß wir im Vektorraum nur solche Verhältnisse studieren, welche invariant sind gegenüber beliebigen unitären Abbildungen. Es ist noch bequem, neben (2) das skalare Produkt $(\xi \eta)$ zweier Vektoren ξ und η durch

$$(\xi \eta) = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n$$

einzuführen. $(\eta \xi)$ ist das Konjugierte zu $(\xi \eta)$. Man wird zwei Vektoren senkrecht aufeinander nennen, wenn ihr skalares Produkt verschwindet.

Zwei von 0 verschiedene Vektoren gehören demselben Strahl an, wenn der eine aus dem anderen durch Multiplikation mit einer (komplexen, von 0 verschiedenen) Zahl hervorgeht. Ein Strahl kann eindeutig bezeichnet werden durch einen ihm angehörenden Vektor ξ vom Betrage 1 (Einheitsvektor). Aber dieser ist seinerseits durch den Strahl nicht eindeutig bestimmt, sondern an Stelle von ξ kann mit gleichem Recht jeder Vektor $\varepsilon \xi$ treten, der aus ihm durch Multiplikation mit einer beliebigen Zahl ε vom absoluten Betrage 1 hervorgeht. Das ist wesentlich anders als im gewöhnlichen Raum, wo nur die Doppeldeutigkeit eines Vorzeichens ± 1 übrigbleibt. Fasse ich eine unitäre Abbildung (4) auf nicht als Abbildung des Vektor-, sondern des Strahlenkörpers (homogener Standpunkt), so soll sie kurz eine Drehung heißen. E und E' stellen dieselbe Drehung dar: $E \simeq E'$, wenn $E' = \varepsilon E$ ist; ε bedeutet dabei, wie im folgenden stets, einen Zahlfaktor vom Betrage 1.

Eine Hermitesche Form ist eine Funktion des willkürlichen Vektors $\mathfrak{x} = (x_i)$ von der Gestalt*

$$A(\mathfrak{x}) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} x_i \bar{x}_k, \quad (5)$$

deren Koeffizienten a_{ik} die Symmetriebedingung

$$a_{ki} = \bar{a}_{ik} \quad \text{oder} \quad \bar{A}^* = A \quad (6)$$

erfüllen. Mit A bezeichne ich zugleich die Koeffizientenmatrix $\|a_{ik}\|$ in dem gerade benutzten Koordinatensystem. Wieder ist es zweckmäßig, damit die zugehörige bilineare Bildung zu verknüpfen:

$$A(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i, k} a_{ik} x_i \bar{y}_k.$$

Es ist zufolge der Symmetriebedingung

$$A(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = \overline{A(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})},$$

und das ist ihre von der Wahl des Koordinatensystems unabhängige Schreibweise. Insbesondere gilt $\overline{A(\mathfrak{x})} = A(\mathfrak{x})$, d. h. die Werte der Hermiteschen Form sind reell; ihr Wert ändert sich nicht, wenn der Argumentvektor \mathfrak{x} ersetzt wird durch $\varepsilon \mathfrak{x}$. Mit jeder Hermiteschen Form A ist in unitär-invarianter Weise die Abbildung $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x} A$ verknüpft, welche dieselbe Koeffizientenmatrix besitzt. Die invariante Natur der Verknüpfung geht daraus hervor, daß die Abbildung einem Vektor \mathfrak{x} denjenigen \mathfrak{x}' zuordnet, der identisch in \mathfrak{y} die Gleichung erfüllt:

$$(\mathfrak{x}' \mathfrak{y}) = A(\mathfrak{x} \mathfrak{y}).$$

Die Grundtatsache für Hermitesche Formen ist der Satz von der Hauptachsentransformation: Ein normales Koordinatensystem e_i kann zu A so gewählt werden, daß in ihm

$$A(\mathfrak{x}) = a_1 x_1 \bar{x}_1 + a_2 x_2 \bar{x}_2 + \cdots + a_n x_n \bar{x}_n \quad (7)$$

wird. Die Eigenwerte a_1, a_2, \dots, a_n sind eindeutig durch die Hermitesche Form bestimmt (natürlich nur bis auf die Reihenfolge). Was die zugehörigen Hauptachsen oder Eigenvektoren e_i betrifft, so steht es mit ihnen in Hinsicht der eindeutigen Bestimmtheit folgendermaßen. Seien etwa die Eigenwerte a_1, a_2, a_3 einander gleich, $= a$, und von den übrigen verschieden. Dann gehört zum Eigenwert a der von den Grundvektoren e_1, e_2, e_3 aufgespannte dreidimensionale Eigenraum $\mathfrak{R}(a)$, der aus allen Vektoren \mathfrak{x} von der Gestalt $x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ besteht; in ihm ist (e_1, e_2, e_3) ein normales Koordinatensystem. Die zu den

* Formen und Matrizen werden stets mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet.

numerisch verschiedenen Eigenwerten a' , a'' , ... gehörigen Teilräume $\mathfrak{R}(a')$, $\mathfrak{R}(a'')$, ..., die gegenseitig aufeinander senkrecht stehen, sind durch A eindeutig determiniert; in jedem von ihnen kann aber das normale Koordinatensystem willkürlich gewählt werden. Das letzte bedeutet in dem angenommenen Beispiel, daß x_1 , x_2 , x_3 untereinander noch einer beliebigen unitären Transformation unterworfen werden können, ohne daß die Normalform (7) zerstört wird.

Zwei Hermitesche Formen A , B lassen sich dann und nur dann simultan auf Hauptachsen transformieren, wenn die Koeffizientenmatrizes vertauschbar sind: $AB = BA$. Ein entsprechender Satz gilt für mehr als zwei Hermitesche Formen, ja für irgend eine endliche oder unendliche Gesamtheit solcher Formen.

§ 2. Der physikalische Begriff des reinen Falles. Ich exemplifiziere am Beispiel des magnetischen Elektrons, weil hier sehr einfache, aber vom klassischen Standpunkt paradoxe Verhältnisse vorliegen. Nach der Annahme von Goudsmit und Uhlenbeck, die sich seither bestens bewährt hat, muß man dem Elektron ein eigenes Impulsmoment zuschreiben, dessen Komponente σ_x in einer beliebigen Richtung, etwa der x -Richtung, nur der beiden Werte $+1$ und -1 fähig ist, wenn $h/4\pi$ als Einheit zugrunde gelegt wird. Man kann sich vorstellen, daß aus einem gegebenen Elektronenstrom, durch ein Verfahren analog dem bekannten Stern-Gerlachschen Experiment zum Nachweis der Richtungsquantelung bei Atomen, der Schwarm derjenigen Elektronen ausgesondert wird, für welche σ_x den Wert $+1$ hat. Die Elektronen dieses Schwarms \mathfrak{S}_x mögen keine Störung erfahren, so daß für sie alle dauernd mit Sicherheit σ_x den Wert $+1$ besitzt. In einem solchen Elektronenschwarm haben wir (wenn wir noch von Ort und Geschwindigkeit der Elektronen abstrahieren) einen „reinen Fall“ vor uns: er ist von einer inneren Homogenität, die prinzipiell nicht mehr gesteigert werden kann. Denn alle physikalischen Fragen, welche sich sinnvoll mit Bezug auf ihn stellen lassen, finden eine von vornherein angebbare numerisch bestimmte Antwort. Solche Fragen sind allein die folgenden: Ist r irgend eine Richtung, mit welcher Wahrscheinlichkeit hat für ein Elektron des \mathfrak{S}_x -Schwarms die Größe σ_r den Wert $+1$ oder -1 ? Die numerisch bestimmte Antwort lautet: Wenn ϑ der Winkel ist, den die r - mit der x -Richtung bildet, so sind die beiden Wahrscheinlichkeiten bzw.

$$= \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \quad \text{und} \quad = \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist als Häufigkeit im Elektronenschwarm zu verstehen; sie würde sich, wenn mit dem Schwarm das Aussonderungsexperiment in der r -Richtung vorgenommen würde, in dem Stärkeverhältnis der beiden Teilstrahlen bekunden*. Hätten wir am Anfang statt der x - eine andere, die x' -Richtung zugrunde gelegt, so hätten wir einen anderen reinen Fall, den Elektronenschwarm $\mathfrak{S}_{x'}$ bekommen. In ihm hat σ_r mit der Wahrscheinlichkeit $\cos^2 \frac{\vartheta'}{2}$ den Wert $+1$, mit der Wahrscheinlichkeit $\sin^2 \frac{\vartheta'}{2}$ den Wert -1 , wenn $\vartheta' = \angle(r, x')$ ist; insbesondere hat $\sigma_{x'}$ mit Sicherheit den Wert $+1$. Dieser reine Fall ist von dem ersten verschieden, weil die gleichen physikalischen Fragen hier andere numerische Antworten finden. Es gibt so viele verschiedene reine Fälle, wie es verschiedene Richtungen x gibt. Wir können aus solchen reinen Strömen $\mathfrak{S}_x, \mathfrak{S}_{x'}, \dots$ Mischungen in irgend einem Verhältnis herstellen. Die Häufigkeit, mit welcher in einem solchen Mischstrom ein $\sigma_r = +1$ oder -1 ist, hängt von dem Mischungsverhältnis ab. Wir sind hier umgekehrt darauf angewiesen, aus den experimentell beobachteten Häufigkeiten Schlüsse auf die Konstitution des Mischstromes zu ziehen. Der Unterschied zwischen reinem Fall und Mischung, den ich hier aufstelle, ist analog zu den biologischen Begriffen der „reinen Linie“ (innerhalb der reinen Linie gelten die Mendelschen Vererbungsgesetze) und der „Population“ (auf welche sich die Gesetze von Galton bezogen). Hier wie dort ist es eine wichtige Aufgabe der Experimentierkunst, reine Linien zu isolieren. Die Unterscheidung: Theorie der reinen Fälle einerseits, Statistik der Gemenge andererseits, scheint mir fundamental für die richtige Erfassung des Sinnes der Quantenmechanik.

An dem Tatbestand, die Elektronenschwärme betreffend, wie er bisher beschrieben wurde, ist nichts Paradoxes. Statt vom Schwarm spreche ich in Zukunft vom einzelnen Elektron und demgemäß von Wahrscheinlichkeit statt von Häufigkeit. Etwas Paradoxes liegt erst in der Aussage, daß σ_x die Komponente eines gewissen Vektors, des Impulsmomentes, in bezug auf die x -Richtung ist. Denn dies involviert doch, wenn wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem xyz im Raume ein-

* Obwohl also \mathfrak{S}_x noch wieder zerlegt werden kann, sind doch die so entstehenden Teilstrahlen nicht homogener als \mathfrak{S}_x selbst. Das ist genau wie bei einem Lichtstrahl, der durch zwei gegeneinander verdrehte Nicols hindurchgegangen ist: er ist von derselben Beschaffenheit wie Licht, das nur durch den zweiten Nicol hindurchging.

führen und die willkürliche Richtung r die Richtungskosinus a, b, c hat, die Gleichung

$$\sigma_r = a \sigma_x + b \sigma_y + c \sigma_z. \quad (8)$$

Wie verträgt sich das mit dem Umstand, daß σ_r so gut wie $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ nur der Werte ± 1 fähig ist? Aber in einem vorliegenden reinen Fall haben die hier auftretenden Größen überhaupt keine mit Sicherheit angebbaren Werte, so daß zunächst der Sinn der Gleichung (8), wenn er in der üblichen Weise auf die Werte der physikalischen Größen bezogen werden soll, ganz im Leeren hängt. Sie wird einen Inhalt erst gewinnen, wenn wir die physikalischen Größen durch solche mathematische Entitäten darstellen, welche Multiplikation mit reellen Zahlen und Addition untereinander zulassen. — Und was soll es zweitens heißen, daß dieser Vektor mit den Komponenten $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ „Impulsmoment“ ist? Damit wird offenbar ein bestimmtes Verhalten dieser Größen gegenüber einem das Elektron einbettenden Magnetfeld (H_x, H_y, H_z) ausgesagt. Wenn wir uns das Elektron ganz naiv als ein rotierendes Kügelchen vorstellen, in welchem das Verhältnis von Ladungs- und Massendichte überall konstant ist, so ergibt sich in der Hamiltonschen Energiefunktion die Hälfte des Terms

$$\mu (H_x \sigma_x + H_y \sigma_y + H_z \sigma_z), \quad (9)$$

dessen Faktor $\mu = \frac{eh}{4\pi mc}$ das Bohrsche Magneton ist (e Ladung m Masse des Elektrons, c Lichtgeschwindigkeit). Der spektroskopische Erfolg der Annahme von Goudsmit und Uhlenbeck beruht bekanntlich darauf, daß für das Elektron der Ausdruck (9) ohne den Faktor $1/2$ als gültig betrachtet wird. Wieder ist es nötig, den Sinn eines Rechenausdrucks wie (9) zu verstehen, der die Addierbarkeit der Größen σ voraussetzt; darüber hinaus muß aber erkannt werden, in welcher Weise die Hamiltonsche Energiefunktion das dynamische Geschehen bestimmt.

§ 3. Die physikalische Bedeutung der repräsentierenden Hermiteschen Form. Der Kalkül der Hermiteschen Formen entspricht in rechnerischer Hinsicht allen Anforderungen, welche sich aus dem eben entwickelten Programm ergeben. Jede physikalische Größe wird repräsentiert durch eine Hermitesche Form, alle physikalischen Größen an demselben System durch Hermitesche Formen der gleichen Variablen x_i . Es ist der schwierigere Teil der Physik, die Regeln ausfindig zu machen, nach denen man zu einer physikalischen Größe die repräsentierende Form und ihre Matrix findet. Hier soll zunächst nur davon die Rede sein, was diese Matrix physikalisch

bedeutet. Ich nehme dabei die Dimensionszahl n des Vektorraums, die Zahl der Variablen x_i endlich, obschon sie in den meisten Fällen unendlich groß ist. Alles Gesagte läßt sich aber analogisch auf den unendlich dimensionalen Vektorraum übertragen. Im oben besprochenen Beispiel des Elektrons ist, wie sich zeigen wird, $n = 2$.

Der einzelne reine Fall wird durch einen Vektor \mathfrak{r} vom Betrage 1 in unserem n -dimensionalen Vektorraum gegeben, die einzelne physikalische Größe α wird repräsentiert durch eine Hermitesche Form A in diesem Raume. Mittels Einführung eines geeigneten normalen Koordinatensystems e_1, e_2, \dots, e_n bringe man $A(\mathfrak{r})$ auf Hauptachsen:

$$A(\mathfrak{r}) = a_1 x_1 \bar{x}_1 + a_2 x_2 \bar{x}_2 + \dots + a_n x_n \bar{x}_n$$

$$(\mathfrak{r} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n). \quad (10)$$

Die Eigenwerte a_1, a_2, \dots, a_n bedeuten die Werte, deren die physikalische Größe α überhaupt fähig ist; die Zahlen $|x_1|^2, |x_2|^2, \dots, |x_n|^2$ bedeuten die Wahrscheinlichkeiten $W(\mathfrak{r})$, mit denen in dem reinen Fall \mathfrak{r} diese Werte angenommen werden. Ihre Summe ist $= 1$, weil \mathfrak{r} ein Vektor vom Betrage 1 ist. Der zweite Teil der Aussage erfordert noch eine gewisse Präzisierung für den Fall, daß mehrere Eigenwerte gleich sind. Sei etwa wieder $a_1 = a_2 = a_3 = a$ von den übrigen Eigenwerten verschieden; dann gehört zu dem Eigenwert a der dreidimensionale Eigenraum $\mathfrak{R}(a)$, der durch die Vektoren e_1, e_2, e_3 aufgespannt wird. Die Wahrscheinlichkeit, mit welcher die physikalische Größe α in dem reinen Fall \mathfrak{r} den Wert a annimmt, ist dann $= |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2$, d. i. gleich dem Quadrat des Betrages der senkrechten Projektion des Vektors \mathfrak{r} auf den Eigenraum $\mathfrak{R}(a)$. Es ist wesentlich zu bemerken, daß mit den Eigenräumen auch die in ihnen liegenden Projektionen des gegebenen Vektors \mathfrak{r} durch die Form A eindeutig bestimmt sind. Gemäß den Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Werte a_i angenommen werden, ist der Wert $A(\mathfrak{r})$ der Hermiteschen Form selber der Mittelwert der Größe α im reinen Fall \mathfrak{r} .

Da alle Aussagen über den reinen Fall \mathfrak{r} numerisch ungeändert bleiben, wenn \mathfrak{r} durch $\varepsilon \mathfrak{r}$ ersetzt wird, darf zwischen ihnen nicht unterschieden werden. Dem reinen Fall entspricht also nicht eigentlich der Vektor, sondern der Strahl; wir haben nicht im Vektor-, sondern im Strahlkörper zu operieren. Dieser Umstand wird erst im zweiten Teil seine fundamentale Bedeutung enthüllen.

Es ist klar, daß man Hermitesche Formen addieren und daß man sie mit reellen Zahlen multiplizieren kann, ohne dadurch aus ihrem Bereich herauszutreten. Die kalkulatorischen Anforderungen, die wir am Schluß von § 2 erhoben, sind erfüllt.

Wenn die Werte, deren die physikalische Größe α fähig ist, sehr dicht liegen oder gar eine kontinuierliche Skale bilden, wird man nicht fragen nach der Wahrscheinlichkeit, mit welcher sie einen bestimmten Wert annimmt, sondern mit der sie in ein bestimmtes Wertintervall $a \leq \alpha \leq a'$ hineinfällt. Nach unserer Anweisung haben wir dann im Hauptachsensystem diejenigen Eigenvektoren e_i aufzusuchen, deren zugehörige Eigenwerte a_i in jenes Intervall hineinfallen; sie spannen den Teilraum $\mathfrak{R}_a^{a'}$ auf. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die auf diesen Teil der Indizes i sich erstreckende Summe

$$\sum_i x_i \bar{x}_i \quad (a \leq a_i \leq a'), \quad (11)$$

der quadrierte Betrag der senkrechten Projektion des den reinen Fall darstellenden Vektors ζ auf den Teilraum $\mathfrak{R}_a^{a'}$. Die Formen (11) sind es, welche v. Neumann a. a. O. als „Einzelformen“ $E_a^{a'}$ einführt.

Liegen mehrere Größen α, β, \dots vor, deren zugehörige Hermitesche Formen vertauschbare Koeffizientenmatrizes besitzen, so lassen sie sich alle simultan durch Einführung eines geeigneten normalen Koordinatensystems e_i auf Hauptachsen transformieren. Die korrespondierenden Eigenwerte zu e_i mögen a_i, b_i, \dots heißen. $\zeta = e_i$ stellt einen reinen Fall vor, in welchem jede der betrachteten Größen mit Sicherheit einen bestimmten Wert hat, nämlich α den Wert a_i, β den Wert b_i usw. Die klassische Physik nimmt an, daß es sich für alle Größen so verhält, und sie läßt nur die reinen Fälle e_1, e_2, \dots, e_n , die besonders ausgezeichnet sind und in denen alle Größen einen bestimmten Wert haben, als reine Fälle zu und faßt die anderen bereits als Gemenge von ihnen auf. Sobald aber zwei physikalische Größen auftreten, deren Matrizes nicht vertauschbar sind, entfällt diese Möglichkeit: In einem reinen Falle, in welchem die erste Größe einen mit Sicherheit angebbaren Wert hat, bestehen für die Werte der zweiten Größe nur Wahrscheinlichkeiten. Das ist in Einklang mit Heisenbergs Anschauungen, wie er sie kürzlich in dieser Zeitschrift (43, 172, 1927) entwickelte.

Im Beispiel des Elektrons ist $n = 2$, weil jede Größe nur zweier Werte fähig ist. Unter Verwendung eines bestimmten normalen

Koordinatensystems e_1, e_2 lauten die den Größen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ entsprechenden Matrizen*

$$S_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad S_y = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad S_z = \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix}, \quad (12)$$

oder als Hermitesche Formen geschrieben:

$$x_1 \bar{x}_1 - x_2 \bar{x}_2, \quad x_1 \bar{x}_2 + x_2 \bar{x}_1, \quad i(x_1 \bar{x}_2 - x_2 \bar{x}_1).$$

Jede von ihnen, ja auch das zu einer beliebigen anderen Richtung r mit den Richtungskosinus a, b, c ($a^2 + b^2 + c^2 = 1$) gehörige

$$S_r = a S_x + b S_y + c S_z = \begin{vmatrix} a, & b + ic \\ b - ic, & -a \end{vmatrix} \quad (13)$$

hat die Eigenwerte ± 1 . Der reine Fall, bei welchem σ_x mit Sicherheit den Wert $+1$ hat, ist durch den Vektor e_1 gegeben. Im reinen Fall $\xi = (x_1, x_2)$ sind die Wahrscheinlichkeiten für $\sigma_x = \pm 1$ bzw. gleich $|x_1|^2, |x_2|^2$. Wir suchen eine Richtung r auf, deren zugehöriges σ_r in diesem Falle mit Sicherheit den Wert $+1$ hat, d. h. für welche der Vektor (x_1, x_2) in die zum Eigenwert $+1$ gehörige Hauptachse von S_r fällt:

$$\begin{aligned} a x_1 + (b + ic) x_2 &= x_1, \\ (b - ic) x_1 - a x_2 &= x_2. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$x_1 : x_2 = b + ic : 1 - a = 1 + a : b - ic.$$

a ist der Kosinus des Winkels ϑ zwischen der r - und der x -Richtung. Wir finden

$$\begin{aligned} |x_1|^2 : |x_2|^2 &= b^2 + c^2 : (1 - a)^2 = 1 - a^2 : (1 - a)^2, \\ &= 1 + a : 1 - a = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} : \sin^2 \frac{\vartheta}{2}. \end{aligned}$$

§ 4. Statistik der Gemeinde. Liegt ein Gemeinde vor, in welchem der reine Fall ξ mit der relativen Stärke v_ξ vertreten ist, $\sum v_\xi = 1$, so ermitteln sich die in ihm stattfindenden Wahrscheinlichkeiten W offenbar durch Summation über die den einzelnen reinen Fällen ξ zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $W(\xi)$ in der Form

$$W = \sum_{\xi} v_{\xi} W(\xi).$$

Darin liegt keinerlei neuer Ansatz. Wenn das Gemeinde ein ganzes Kontinuum reiner Fälle enthält, verwandeln sich die Summen in Integrale.

* W. Pauli jr., Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons, ZS. f. Phys. 43, 601, 1927; P. Jordan, ebenda 44, 21ff., 1927.

Wenn wir nur wissen, welche reinen Fälle ζ in einem Gemenge vertreten sind — sie werden ein gewisses Gebiet \mathcal{G} des Strahlenkörpers ausfüllen —, werden wir der Statistik die Annahme zugrunde legen, daß innerhalb \mathcal{G} alle ζ gleichberechtigt sind. Diese Annahme ist möglich und hat einen klaren Sinn, weil der ζ -Raum als metrischer Raum ein natürliches Volumenmaß trägt. Solche Gemenge entstehen namentlich durch Störungen, z. B. durch die Wärmebewegung und die Zusammenstöße der Partikeln, auf welche sich die Wahrscheinlichkeitsfeststellungen beziehen. Zunächst ist bei Mittelung über den ganzen Strahlenkörper

$$\langle x_i \bar{x}_i \rangle = \frac{1}{n}, \quad \langle x_i \bar{x}_k \rangle = 0 \quad (i \neq k).$$

Die Klammer $\langle \rangle$ bezeichnet den Mittelwert. Danach ist der Mittelwert der durch die Form (5) dargestellten Größe α , wenn über die auftretenden reinen Fälle gar nichts bekannt ist,

$$= \frac{1}{n} (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}).$$

Die Summe der Glieder in der Hauptdiagonale, die Spur der Hermiteischen Form, stellt sich übrigens dadurch als eine Invariante gegenüber unitären Transformationen heraus.

Ein weiteres Problem dieser Art ist das folgende: α und β seien zwei bzw. durch A und B repräsentierte Größen. Ich führe die beiden aus den Eigenvektoren e_i und e_i^* von A bzw. B bestehenden normalen Koordinatensysteme ein:

$$A(x) = \sum_i a_i x_i \bar{x}_i, \quad B(x) = \sum_i b_i x_i^* \bar{x}_i^* \quad (x = \sum x_i e_i = \sum x_i^* e_i^*),$$

und die unitäre Transformation, welche zwischen ihnen vermittelt:

$$x_k^* = \sum_i t_{ik} x_i.$$

Es sei bekannt, daß die Größe α sicher in den Grenzen $a \leq \alpha \leq a'$ liegt; gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit W , mit welcher die Größe β in den Grenzen $b \leq \beta \leq b'$ liegt. Von den Eigenwerten der Form A mögen etwa a_1, a_2, \dots, a_q dem Intervall a, a' angehören, während $b_1, b_2, \dots, b_\sigma$ die Eigenwerte der Form B sind, welche sich zwischen b und b' finden. Dadurch, daß wir wissen, α liegt mit Sicherheit zwischen a und a' , ist es ausgeschlossen, daß α einen von a_1, a_2, \dots, a_q verschiedenen Eigenwert annimmt; die damit verträglichen reinen Fälle sind diejenigen, für welche $x_{q+1} = \dots = x_n = 0$ ist, sie gehören

dem von e_1, e_2, \dots, e_q aufgespannten Teilraum $\mathfrak{R}_a^{a'}$ an. Der ins Quadrat erhobene Betrag der senkrechten Projektion eines beliebigen Vektors ζ auf diesen Teilraum ist gegeben durch die Einzelform

$$E_a^{a'} = \sum_{i=1}^q x_i \bar{x}_i = \sum_{i,k=1}^n e_{ik} x_i \bar{x}_k. \quad (14)$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der in einem reinen Fall ζ die Größe β einen der Werte $b_1, b_2, \dots, b_\sigma$ annimmt, ist andererseits gegeben durch die Einzelform

$$F_b^{b'} = \sum_{i=1}^{\sigma} x_i^* \bar{x}_i^* = \sum_{i,k=1}^n f_{ik} x_i \bar{x}_k; \quad f_{ik} = \sum_{s=1}^{\sigma} t_{is} \bar{t}_{ks}.$$

Nach unserer Anweisung hat man in $F_b^{b'}$ alle Variablen x_i außer den ersten q gleich Null zu setzen und dann über den Teilraum $\mathfrak{R}_a^{a'}$ zu mitteln. Dabei ist

$$\langle x_i \bar{x}_k \rangle = \begin{cases} 1/q & (\text{für } i = k \leq q) \\ 0 & (\text{für alle anderen Paare } i, k) \end{cases}$$

oder

$$\langle x_i \bar{x}_k \rangle = \frac{1}{q} e_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

So kommt

$$W = \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q f_{rr} = \frac{1}{q} \sum_{i,k=1}^n f_{ik} e_{ki} = \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q \sum_{s=1}^{\sigma} |t_{rs}|^2.$$

Hält man das Intervall aa' fest und will nur die relativen Wahrscheinlichkeiten miteinander vergleichen, die verschiedenen Intervallen bb' entsprechen, so kann man den konstanten Faktor $\frac{1}{q}$ weglassen. Die Summe rechts ist die Spur von $E_a^{a'} F_b^{b'}$. Weil einer Hermiteschen Form die Abbildung mit derselben Koeffizientenmatrix unitär-invariant assoziiert ist, hat neben der Spurbildung auch die Zusammensetzung der Matrizen von Hermiteschen Formen einen invarianten Sinn. Infolgedessen genügt es, die Einzelformen $E_a^{a'}, F_b^{b'}$ in irgend einem normalen Koordinatensystem zu kennen, um daraus die gesuchten relativen Wahrscheinlichkeiten mittelst der Formel

$$W = \text{Spur} (E_a^{a'} \cdot F_b^{b'})$$

zu finden. Diese Art von Fragen über Gemenge zieht v. Neumann, a. a. O. allein in Betracht. Sein Schlußresultat ist mit unserem natürlich inhaltlich identisch, aber seine Formel ist komplizierter. In der ganzen

Betrachtung kann α durch mehrere Größen ersetzt werden, die simultan beobachtbar sind, deren Hermitesche Formen sich also simultan auf Hauptachsen bringen lassen, desgleichen β .

Erst bei solchen Fragen über Gemenge spielt die Statistik eine Rolle, welche „relativ ist auf unsere Kenntnis und Unkenntnis“, wie Laplace sagt, oder auf Störungen, die man nicht im einzelnen verfolgen will, obwohl sie sich, wenigstens prinzipiell, verfolgen ließen. Die Wahrscheinlichkeit, von der in den reinen Fällen die Rede ist, hat hingegen eine völlig objektive Bedeutung, die nichts mit Störungen zu tun hat, und wird durch strenge Naturgesetze regiert.

II. Teil. Kinematik als Gruppe.

§ 5. Über Gruppen und ihre unitären Darstellungen. Für die unitären Abbildungen gilt ein analoges Theorem, wie das von der Hauptachsentransformation der Hermiteschen Formen: Zu einer gegebenen unitären Abbildung läßt sich ein solches normales Koordinatensystem e_i finden, in welchem die Abbildung durch die Gleichungen

$$x'_k = e_k x_k \quad (15)$$

wiedergegeben wird. Die Eigenwerte e_k sind Zahlen vom absoluten Betrag 1, ihre Phasen φ_k , $e_k = e^{i\varphi_k}$, heißen die Drehwinkel der unitären Abbildung. Analoge Bemerkungen, wie für die Hauptachsentransformation der Hermiteschen Formen, greifen Platz betreffs der Eindeutigkeit, mit welcher Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmt sind, sowie betreffs der simultanen Überführung mehrerer unitärer Abbildungen in die Normalform (15).

Aus einer Gruppe unitärer Abbildungen abstrahiert man das Gruppenschema, indem man die Abbildungen zu Elementen gleichgültiger Beschaffenheit degradiert und nur auf die Art ihrer Zusammensetzung achtet. Die abstrakte Gruppe ist also ein System von Elementen, innerhalb dessen durch „Komposition“ aus zwei Elementen a, b in bestimmter Reihenfolge ein Element ab des Systems entspringt; in solcher Weise, daß

1. das assoziative Gesetz gilt: $(ab)c = a(bc)$;
2. ein „Einheitselement“ 1 existiert, das die Gleichung $1s = s1 = s$ für jedes Element s der Gruppe erfüllt; und daß
3. zu jedem Element a ein inverses a^{-1} vorhanden ist mit der Eigenschaft $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Die Gruppe der unitären Abbildungen erscheint dann als eine Verwirklichung oder Darstellung der abstrakten Gruppe, welche dadurch zustande kommt, daß jedem Gruppenelement s eine unitäre Abbildung $U(s)$ in solcher Weise zugeordnet ist, daß allgemein

$$U(s)U(t) = U(st) \quad (16)$$

gilt [es folgt daraus sofort $U(1) = \mathbf{1}$]. Da das Gruppenschema aus der Darstellung abstrahiert wurde, ist die Darstellung getreu, d. h. verschiedenen Elementen entsprechen verschiedene Abbildungen U , oder, was dasselbe besagt, $U(s) = \mathbf{1}$ nur für $s = 1$. Die Gruppe der unitären Abbildungen ist reduzibel, wenn in dem Vektorraum \mathfrak{R}_n , in welchem sich die unitären Abbildungen abspielen, ein linearer Unterraum \mathfrak{R}_m existiert mit einer Dimensionszahl $m > 0$, aber $< n$, der gegenüber allen $U(s)$ invariant ist. Die Vektoren, welche zu allen in \mathfrak{R}_m gelegenen senkrecht sind, bilden einen linearen Unterraum \mathfrak{R}_{n-m} ; und es ist $\mathfrak{R}_n = \mathfrak{R}_m + \mathfrak{R}_{n-m}$ in dem Sinne, daß sich jeder Vektor auf eine und nur eine Weise in zwei Komponenten spalten läßt, von denen die erste \mathfrak{R}_m , die zweite \mathfrak{R}_{n-m} angehört. Weil die $U(s)$ unitäre Transformationen sind, lassen sie außer \mathfrak{R}_m auch \mathfrak{R}_{n-m} invariant: Die Darstellung zerfällt in eine m -dimensionale und eine $(n-m)$ -dimensionale. Wählt man das normale Koordinatensystem e_i so, daß die ersten m Grundvektoren den Raum \mathfrak{R}_m aufspannen, die letzten $n-m$ aber den Raum \mathfrak{R}_{n-m} , so kommt dieser Zerfall an den Koeffizientenmatrizen $U(s)$ unmittelbar zum Ausdruck. Man kann sich danach auf die Aufsuchung der irreduziblen Darstellungen beschränken. Für irreduzible Darstellungen gilt der wichtige Satz: Ist die unitäre Matrix A mit allen $U(s)$ vertauschbar: $AU(s) = U(s)A$, so ist $A = \varepsilon \mathbf{1}$ Multiplum der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$. [Es ist dabei sogar unwesentlich, daß die $U(s)$ eine Gruppe bilden.]

Wir denken in erster Linie an endliche Gruppen. Zu jeder Gruppe gehört eine bestimmte „Größenalgebra“. Eine Größe im Gruppengebiet wird dadurch gegeben, daß jedem Gruppenelement s eine Zahl $\xi(s)$ zugeordnet wird. Die Größen haben demnach so viele Zahlkomponenten, wie es Gruppenelemente gibt, sie sind sozusagen die Vektoren im Gruppenraum, in dem jedes Element eine Dimension, einen Grundvektor bedeutet*. Die Größe ξ mit den Komponenten $\xi(s)$, die danach symbolisch mit $\sum \xi(s) \cdot s$ bezeichnet werden mag, erscheint in

* Den in der mathematischen Literatur gebräuchlichen Namen Gruppenzahl vermeide ich, weil ich das Wort „Zahl“ für die gewöhnlichen Zahlen reservieren möchte.

der Verwirklichung der Elemente s durch die unitären Abbildungen $U(s)$ als die Matrix

$$X = \sum_s \xi(s) U(s). \tag{17}$$

Bildet man das Produkt zweier solcher Matrizen X, Y , welche zu den Größen ξ und η gehören, so entsteht wiederum eine Matrix Z , die zu einer bestimmten, durch ξ und η determinierten Größe ζ gehört. Denn es ist

$$\begin{aligned} Z = XY &= \sum_{t,t'} U(t) U(t') \xi(t) \eta(t') = \sum_{t,t'} U(tt') \xi(t) \eta(t') \\ &= \sum_s U(s) \zeta(s), \quad \zeta(s) = \sum_{tt'=s} \xi(t) \eta(t'). \end{aligned} \tag{18}$$

Die Summe in (18) erstreckt sich über alle Paare von Elementen t, t' , deren Kompositum $tt' = s$ ist. Man kann sie als einfache Summe über alle Gruppenelemente t , aber weniger symmetrisch auch so schreiben:

$$\zeta(s) = \sum_t \xi(st^{-1}) \eta(t) = \sum_t \xi(t) \eta(t^{-1}s).$$

(18) ist also das Multiplikationsgesetz der Größen im Gruppengebiet. Die Größen können danach, in genauer Anschmiegung an die zugehörigen Matrizen, addiert werden, mit Zahlen multipliziert und untereinander multipliziert werden; in solcher Weise, daß die wichtigsten algebraischen Axiome erfüllt bleiben. (Nur das kommutative Gesetz der Multiplikation und das Axiom, welches Nullteiler ausschließt, gelten nicht.)

Die Größe ξ heißt reell, wenn ihre Komponenten der Gleichung

$$\xi(s^{-1}) = \bar{\xi}(s) \tag{19}$$

genügen. Die zugehörige Matrix X ist dann Hermitesch. Denn aus

$$U(s)U(s^{-1}) = \mathbf{1} \quad \text{zusammen mit} \quad \bar{U}^*(s)U(s) = \mathbf{1}$$

folgt $\bar{U}^*(s) = U(s^{-1})$. Darum gilt, unter der Voraussetzung (19),

$$\bar{X}^* = \sum_s \bar{\xi}(s) \bar{U}^*(s) = \sum_s \xi(s^{-1}) U(s^{-1}) = \sum_s \xi(s) U(s) = X.$$

Den Bereich der reellen Größen verläßt man nicht durch Addition, Multiplikation der Größen untereinander und durch ihre Multiplikation mit reellen Zahlen*.

Für uns kommen vorzugsweise die Abelschen Gruppen in Betracht, bei welchen die Komposition der Elemente kommutativ ist:

* Von der natürlichen und wichtigen Rolle, welche diese Begriffe in der Darstellungstheorie spielen, die sich nachher auch als die grundlegenden in der Quantenmechanik herausstellen werden, kann man nur einen Eindruck gewinnen durch das Studium dieser Theorie. Es sei insbesondere verwiesen auf: F. Peter und H. Weyl, *Math. Ann.* **97**, 737, 1927.

$st = ts$. Eine endliche Abelsche Gruppe besitzt eine Basis a_1, a_2, \dots, a_f . Das sind f Elemente der Gruppe mit folgenden Eigenschaften: Bedeuteten h_1, h_2, \dots, h_f ihre Ordnungen, so erhält man alle Gruppenelemente in der Form

$$s = a_1^{z_1} a_2^{z_2} \dots a_f^{z_f}, \quad (20)$$

wenn z_i ein volles Restsystem mod. h_i , z. B. die Zahlen $1, 2, \dots, h_i$ durchläuft. (Ordnung h eines Elementes a ist der niederste Exponent, für welchen a^h gleich dem Einheitselement 1 ist.) Die Auswahl der Basiselemente kann so normiert werden, daß h_2 ein Teiler von h_1 , h_3 ein Teiler von h_2 , \dots , h_f ein Teiler von h_{f-1} ist. Unter diesen Umständen ist die Zahl der Basiselemente und die Teilerreihe (h_1, h_2, \dots, h_f) ihrer Ordnungen eindeutig durch die Gruppe bestimmt. Jene Teilerreihe charakterisiert umgekehrt vollständig die Struktur der Gruppe.

Die Aufsuchung der irreduziblen Darstellungen einer Abelschen Gruppe ist sehr einfach. Da nämlich die unitären Matrizen $U(s)$ in diesem Falle vertauschbar sind, kann man sie nach einem oben erwähnten Satz alle gleichzeitig „auf Hauptachsen bringen“; die Darstellung zerfällt also in lauter eindimensionale, es gibt nur eindimensionale irreduzible Darstellungen:

$$x' = \varepsilon(s) \cdot x.$$

Dabei ist die Abhängigkeit der Zahl $\varepsilon(s)$ vom Gruppenelement s so zu beschreiben: Dem Basiselement a_i korrespondiert eine h_i -te Einheitswurzel ε_i , und es ist für (20):

$$\varepsilon(s) = \varepsilon_1^{z_1} \varepsilon_2^{z_2} \dots \varepsilon_f^{z_f}$$

(Charaktere einer Abelschen Gruppe).

Aber das Darstellungsproblem stellt sich für uns in etwas anderer Gestalt, als es bislang besprochen wurde. Denn in der Quantenmechanik haben nicht die Vektoren eine Bedeutung, sondern lediglich die Strahlen; sie kennzeichnen die verschiedenen reinen Fälle. Wir gehen also zu dem homogenen Standpunkt über, für welchen die unitäre Matrix U nicht eine Abbildung des Vektor-, sondern des Strahlenkörpers bedeutet und demgemäß mit der Abbildung εU zusammenfällt. So soll das Wort Darstellung in Zukunft verstanden werden: als getreue Darstellung durch Drehungen des Strahlenkörpers*. Die charakteristische Forderung lautet nunmehr:

$$U(s)U(t) \simeq U(st). \quad (21)$$

* Tiefgehende Untersuchungen über das Darstellungsproblem in diesem Sinne hat I. Schur angestellt: Crelles Journ. **127**, 20, 1904 und **132**, 85, 1907.

Wir können den willkürlichen Faktor ε in jedem $U(s)$ nach Gutdünken fixieren („Eichung“). Als Gleichung wird dann (21) so zu lesen sein:

$$U(s) U(t) = \delta(s, t) U(st),$$

wo δ eine von s und t abhängige Zahl vom absoluten Betrag 1 ist. Die Angabe einer Größe ξ im Gruppengebiet ist relativ auf die benutzte Eichung; wird die Eichung gemäß der Formel $U(s) \rightarrow \varepsilon(s) U(s)$ verändert, so müssen die Komponenten $\xi(s)$ jeder Größe ξ ersetzt werden durch $\varepsilon^{-1}(s)\xi(s)$. Das Multiplikationsgesetz lautet

$$\xi(s) = \sum_{tt'=s} \delta(t, t') \xi(t) \eta(t').$$

Die Beschreibung (19) der reellen Größen ξ ist nur dann zutreffend, wenn die Eichung so eingerichtet wurde, daß $U(s^{-1}) = U^{-1}(s)$ ist. Für eine irreduzible Darstellung gilt nach wie vor der Satz: Ist die feste Drehung A mit allen $U(s)$ vertauschbar, $A^{-1} U(s) A = U(s)$, so ist $A \simeq \mathbf{1}$.

Die eindimensionalen Darstellungen verlieren jetzt jedes Interesse; denn die einzige eindimensionale Drehung ist die Identität. Aber im gegenwärtigen Sinne gibt es auch für Abelsche Gruppen mehrdimensionale irreduzible Darstellungen. Nicht freilich, wenn die Abelsche Gruppe zyklisch ist, aus den Wiederholungen eines einzigen Elementes a besteht:

$$1, a, a^2, \dots, a^{h-1} \quad (a^h = 1).$$

Denn ist A die a korrespondierende Matrix in der Darstellung, so ist $A^h = \varepsilon \mathbf{1}$. Indem man A durch den Zahlfaktor $\sqrt[h]{\varepsilon}$ dividiert, erreicht man eine solche Eichung des A , daß $A^h = \mathbf{1}$ wird. Dann bilden aber die Potenzen von A eine Darstellung der zyklischen Gruppe im alten inhomogenen Sinne. Wir illustrieren daher das Gesagte durch die einfachste nicht-zyklische Abelsche Gruppe. Das ist die Vierergruppe. Sie besteht aus vier Elementen $1, a, b, c$, und ist beschrieben durch die Kompositionsregel

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 = c^2 = 1, \\ bc = cb = a, \quad ca = ac = b, \quad ab = ba = c. \end{aligned}$$

Eine irreduzible mit ihr isomorphe Drehungsgruppe ist die folgende \mathfrak{B} :

$$\begin{aligned} U(1) = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad U(a) = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right\|, \quad U(b) = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\|, \\ U(c) = \left\| \begin{array}{cc} 0 & i \\ -i & 0 \end{array} \right\|. \end{aligned} \quad (22)$$

Die Eichung ist so gewählt, daß $U^3(a)$ oder $U(a)U(a^{-1}) = \mathbf{1}$ ist und Entsprechendes für die übrigen Elemente gilt. Die „reellen Größen“

$$\varrho \mathbf{1} + \xi a + \eta b + \zeta c \quad (23)$$

sind also jene, deren Komponenten $\varrho, \xi, \eta, \zeta$ reelle Zahlen sind. Ihre Algebra ist die einfachste nicht-kommutative, welche existiert: die der Quaternionen (genauer derjenigen Quaternionen, von denen die skalare Komponente reell ist, die drei vektoriiellen rein imaginär). In der Darstellung \mathfrak{B} erscheint die Größe (23) als die Matrix

$$X = \begin{vmatrix} \varrho + \xi & \eta + i\xi \\ \eta - i\xi & \varrho - \xi \end{vmatrix}.$$

Die Irreduzibilität geht ohne weiteres daraus hervor, daß zwischen den vier Koeffizienten dieser Matrix, wenn $\varrho, \xi, \eta, \zeta$ als Variable betrachtet werden, keine homogene lineare Relation mit konstanten Zahlkoeffizienten besteht. Wir kennen dieses Beispiel schon vom magnetischen Elektron her. Allgemein werden wir erkennen, daß eine irreduzible Abelsche Drehungsgruppe im Strahlenkörper der reinen Fälle der Kinematik eines physikalischen Systems zugrunde liegt; die reellen Größen in diesem Gruppengebiet sind die physikalischen Größen des Systems.

Innerhalb einer Abelschen Drehungsgruppe gilt für die (irgendwie geeichten) Matrizen zweier Drehungen A und B eine Gleichung

$$AB = \varepsilon BA. \quad (24)$$

Wir haben uns zu überlegen, in welcher Weise sie erfüllt sein kann. Bildet man auf beiden Seiten die Determinante, so ergibt sich $\varepsilon^n = 1$, ε ist also eine n -te Einheitswurzel. Ferner erhält man durch Induktion für $k = 1, 2, 3, \dots$:

$$\text{ebenso} \quad \left. \begin{aligned} A^k B &= \varepsilon^k B A^k, \\ A B^l &= \varepsilon^l B^l A. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Kombiniert man beide Gleichungen, indem man die zweite auf A^k und B statt auf A und B anwendet, so erhält man die allgemeinere Regel

$$A^k B^l = \varepsilon^{kl} B^l A^k. \quad (26)$$

Weiter notieren wir die Gleichung

$$(AB)^k = \varepsilon^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot B^k A^k. \quad (27)$$

Sie folgt sogleich durch Schluß von k auf $k+1$, indem man die erste Formel (25) heranzieht. Setzen wir in (25) insbesondere $k = n$, so kommt $A^n B = B A^n$. Wenn die Abelsche Drehungsgruppe irreduzibel ist, erschließt man aus dieser Vertauschbarkeit von A^n mit allen Gruppenelementen $B: A^n \simeq \mathbf{1}$. Die Ordnungen aller Elemente einer irre-

duziblen Abelschen Drehungsgruppe in n Dimensionen sind demnach Teiler von n .

Liegt eine endliche Abelsche Gruppe in abstracto vor, (20), so wird man zur Aufsuchung ihrer getreuen irreduziblen n -dimensionalen Darstellungen folgendermaßen verfahren. Für jedes Basiselement, z. B. $a_1 = a$ von der Ordnung $h_1 = h$, eicht man $U(a) = A$ in solcher Weise, daß $A^h = \mathbf{1}$ ist. Nachdem dies geschehen, eiche man $U(s)$ für das Element (20) durch die Festsetzung

$$U(s) = A_1^{z_1} A_2^{z_2} \dots A_f^{z_f}.$$

Es kommt nun wesentlich auf die Bestimmung der Kommutatorzahlen ε_{ik} in den Gleichungen

$$A_i A_k = \varepsilon_{ik} A_k A_i \quad (i > k; \quad i, k = 1, 2, \dots, f) \quad (28)$$

an. Da aus (28)

$$A_i^{h_i} A_k = \varepsilon_{ik}^{h_i} A_k A_i^{h_i},$$

das ist

$$A_k = \varepsilon_{ik}^{h_i} A_k$$

folgt, muß ε_{ik} eine h_i -te Einheitswurzel sein.

§ 6. Übertragung auf kontinuierliche Gruppen. Eine infinitesimale unitäre Abbildung ist eine solche, welche unendlich wenig von der Identität abweicht, durch die also alle Vektoren $x = (x_i)$ nur unendlich kleine Änderungen $dx = (dx_i)$ erfahren. Der analoge Begriff für reelle orthogonale Abbildungen des dreidimensionalen Raumes ist aus der Kinematik des starren Körpers geläufig: bei der kontinuierlichen Drehung eines Kreisels wird von Schritt zu Schritt eine infinitesimale Drehung vollzogen. Ein anderes einfaches Beispiel ist der Prozeß der kontinuierlichen Verzinsung zu festem Zinssatz, der eine Größe x in jedem Zeitelement dt mit dem Faktor $1 + c dt$ multipliziert, ihr also den Zuwachs $dx = cx dt$ erteilt. Der Erfolg wird sein, daß sie im Zeitraum t von x auf $e^{ct} \cdot x$ angewachsen ist. Um die unendlich kleinen Größen zu vermeiden, ist es auch hier zweckmäßig, eine (rein fiktive) Zeit τ einzuführen und daher die infinitesimale unitäre Abbildung in der Form zu schreiben

$$\frac{dx}{d\tau} = x C, \quad \frac{dx_k}{d\tau} = \sum_i c_{ik} x_i. \quad (29)$$

Die Forderung, daß $\sum x_i \bar{x}_i$ invariant bleiben soll, drückt sich in der Gleichung aus

$$\sum_k \left(x_k \frac{d\bar{x}_k}{d\tau} + \bar{x}_k \frac{dx_k}{d\tau} \right) = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{i,k} (c_{ik} + \bar{c}_{ki}) x_i \bar{x}_k = 0.$$

Die Hermitesche Form auf der linken Seite kann aber nur dann identisch in den x_i verschwinden, wenn alle ihre Koeffizienten Null sind. So ergeben sich die Bedingungen der schiefen Symmetrie

$$\bar{c}_{ki} = -c_{ik}, \quad \bar{C}^* = -C.$$

Setzt man $C = iA$, so ist A eine Hermitesche Matrix. Resultat: Mit jeder Hermiteschen Form A ist in unitär-invarianter Weise (vgl. § 1) die infinitesimale unitäre Abbildung

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = i\zeta A$$

verbunden. Der Satz von der Hauptachsentransformation der Hermiteischen Formen stellt sich dadurch als der infinitesimale Grenzfall des entsprechenden Theorems für unitäre Abbildungen heraus. Diejenigen infinitesimalen Abbildungen, welche alle Strahlen ungeändert lassen, haben die Form

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = i c \zeta,$$

mit einem reellen Zahlfaktor c . Der homogene Standpunkt verlangt also hier, daß A nicht von $A + c \mathbf{1}$ unterschieden wird.

Indem man in jedem Zeitelement $d\tau$ die gleiche infinitesimale unitäre Abbildung (29) wiederholt, erhält man durch Integration von (29)

$$\zeta(\tau) = \zeta U(\tau).$$

$U(\tau)$ ist die endliche Drehung, welche im Zeitraum τ vor sich geht. Es ist natürlich

$$U(\tau + \tau') = U(\tau) U(\tau').$$

Die $U(\tau)$ bilden also eine einparametrische kontinuierliche Gruppe; gegenüber der Zusammensetzung verhält sich der Zeitparameter τ additiv. Vgl. den oben geschilderten Prozeß der kontinuierlichen Verzinsung! Die Integration von (29) kann in der gleichen Weise vorgenommen werden wie in diesem einfachsten Fall. Unter Benutzung einer gegen ∞ strebenden ganzen Zahl m zerlegt man die Zeit τ in Elemente $\frac{\tau}{m}$. In jedem

der m Zeitelemente erfährt ζ die Transformation $\mathbf{1} + \frac{\tau}{m} C$; daher ist

$$U(\tau) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\mathbf{1} + \frac{\tau C}{m} \right)^m = e^{\tau C}.$$

Die Konvergenz kann ebenso leicht bewiesen werden wie im eindimensionalen Fall, wenn C eine Zahl ist. Auch ergibt sich die Potenzreihe

$$U(\tau) = \mathbf{1} + \frac{\tau}{1!} C + \frac{\tau^2}{2!} C^2 + \dots \quad (30)$$

Eine andere Methode ist die sukzessive Approximation; sie setzt nicht voraus, daß C von τ unabhängig ist. Als nullte Approximation wird das für $\tau = 0$ vorgegebene ξ genommen, allgemein wird die l -te aus der $(l - 1)$ -ten Annäherung mittels der Gleichung

$$\frac{d\xi_l}{d\tau} = \xi_{l-1} C \quad \text{zu} \quad \xi_l(\tau) = \xi + \int_0^\tau \xi_{l-1}(\tau) C d\tau$$

bestimmt. Die Annäherungen $\xi_l(\tau)$ konvergieren mit $l \rightarrow \infty$ gegen die gesuchte Grenze $\xi(\tau)$. Es ergibt sich für $\xi(\tau)$ eine unendliche Reihe:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \int_{0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_l \leq \tau} C(\tau_1) C(\tau_2) \dots C(\tau_l) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_l. \quad (31)$$

Bei zeitunabhängigem C kommt wieder die Gleichung (30) heraus.

Eine Zwischenbemerkung: Es wurde erwähnt, daß in der Physik meist Formen mit unendlich vielen Variablen eine Rolle spielen. Die Theorie der Hermiteschen Formen von unendlich vielen Veränderlichen unter dem Einfluß unitärer Transformationen wurde von Hilbert und Hellinger entwickelt, unter der Voraussetzung, daß die Form beschränkt ist, d. h. daß eine Konstante M existiert, unter der die Werte der Form ihrem absoluten Betrage nach für alle Vektoren vom Betrage 1 bleiben*. Die in der Physik vorkommenden Formen genügen dieser Bedingung nicht. Eine Erweiterung der Theorie, welche den physikalischen Anforderungen genügt, hat v. Neumann a. a. O. in Aussicht gestellt. Es ergibt sich hier die Aufgabe, das Analoge für die unitären Abbildungen zu leisten. Für sie wird die Theorie wesentlich befriedigender ausfallen, weil keinerlei spezielle, die Konvergenz garantierende Voraussetzungen zu machen sind, wie es die Hilbertsche Annahme der Beschränktheit war. Denn der Begriff der unitären Abbildung bringt es mit sich, daß in der Matrix die Quadratsumme der absoluten Beträge jeder Zeile und jeder Spalte konvergiert, nämlich = 1 ist. (Die mathematische Durchführung soll an anderer Stelle gegeben werden.) Der integrale Standpunkt ist in begrifflicher Hinsicht dem infinitesimalen immer überlegen, er läßt zugleich die natürlichen Grenzen der differentiellen Begriffsbildungen erkennen. In diesem Sinne ist es zweckmäßig, da mit einer Größe α ja immer auch ihre reellen konstanten Multipla $k\alpha$ als physikalische Größen auftreten, diese zu ersetzen durch $e^{ik\alpha}$, die Hermiteschen Matrizen kA

* D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen, Leipzig 1912, insbesondere IV. Abschnitt. E. Hellinger, Crelles Journal 136, 1, 1910.

durch die unitären e^{ikA} . Mit A erscheinen sie zugleich auf Hauptachsen transformiert, wobei an Stelle der a_μ die Zahlen $e^{ik a_\mu}$ als Eigenwerte sich ergeben.

Doch nun zu den unendlichen Gruppen! Eine unendliche Gruppe kann diskontinuierlichen Charakter haben, wie die in der Lehre von der Kristallstruktur auftretende Gruppe der Gittertranslationen des Raumes, deren Komponenten in bezug auf die drei Achsen x, y, z ganze Zahlen sind. Es können auch gemischte kontinuierlich-diskrete Gruppen vorkommen, wie die Gruppe aller Raumtranslationen, deren x -Komponente ganzzahlig ist. Doch haben wir jetzt insbesondere die kontinuierlichen Gruppen im Auge. Eine solche denkt man sich nach S. Lie erzeugt durch ihre infinitesimalen Elemente. Ist die Gruppe eine f -parametrische kontinuierliche Mannigfaltigkeit \mathfrak{G} , so sind die infinitesimalen Elemente die Stellen auf der Gruppenmannigfaltigkeit, welche der Einheitsstelle 1 unendlich benachbart sind, oder die von 1 ausgehenden Linienelemente. Sie bilden also eine f -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit. Halten wir uns sogleich an die Darstellung, an die konkreten unitären Abbildungen statt an die abstrakten Elemente, so haben wir mithin eine f -dimensionale lineare Schar schiefer Matrizen vor uns:

$$\mathfrak{g}: C_1 d\sigma_1 + C_2 d\sigma_2 + \dots + C_f d\sigma_f, \quad (32)$$

innerhalb deren C_1, C_2, \dots, C_f eine willkürlich gewählte Basis ist und die Zahlparameter $d\sigma_1, d\sigma_2, \dots, d\sigma_f$ aller reellen Werte fähig sind. Setzt man in (32) $d\sigma_i = \alpha_i d\tau$ und iteriert diese infinitesimale Abbildung, die man sich im Zeitelement $d\tau$ vollzogen denkt, so gelangt man nach Ablauf der Zeit τ , wenn an Stelle von $\alpha_i \tau$ jetzt wieder σ_i geschrieben wird, zu

$$U(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_f) = e^{\sigma_1 C_1 + \sigma_2 C_2 + \dots + \sigma_f C_f}. \quad (33)$$

Innerhalb der infinitesimalen Gruppe \mathfrak{g} gibt sich die Komposition an den Parametern $d\sigma$ als Addition kund. Es könnte darum so scheinen, daß jede lineare Schar (32) eine f -parametrische kontinuierliche Gruppe nach der Formel (33) erzeugt. Das ist aber nicht der Fall, wie die folgende Betrachtung lehrt, die nach dem Muster bekannter Integrabilitätsüberlegungen verläuft. Sie nutzt für die infinitesimalen Elemente die Tatsache aus, daß mit zwei Abbildungen U, V auch der Kommutator $UVU^{-1}V^{-1}$ in der Gruppe enthalten sein muß. Sind also C, C' zwei in der Schar \mathfrak{g} vorkommende Matrizen, so gehören die infinitesimalen Abbildungen

$$d\mathfrak{r} = \mathfrak{r} C d\tau \quad \text{und} \quad d'\mathfrak{r} = \mathfrak{r} C' d\tau'$$

zur Gruppe. Führt man sie beide hintereinander aus, das eine Mal in der Reihenfolge d, d' , das andere Mal in der Reihenfolge d', d , so ist die Differenz der dadurch aus χ entstehenden Vektoren

$$\Delta\chi = dd'\chi - d'd\chi = \chi(C C' - C' C) d\tau d\tau'.$$

Diese infinitesimale Abbildung ist der gesuchte Kommutator. Infolgedessen muß mit C und C' auch immer $C C' - C' C$ der Schar \mathfrak{g} angehören. An der Basis formuliert, heißt das, daß die Matrizen $C_i C_k - C_k C_i$ sich linear mittels reeller Zahlkoeffizienten aus C_1, C_2, \dots, C_f kombinieren müssen. Diese von Lie aufgestellte Bedingung, deren Herleitung leicht streng zu machen ist, ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend*.

Die Gruppe ist Abelsch, wenn der Kommutator irgend zweier Elemente gleich $\mathbf{1}$ ist. In diesem Falle müssen die Matrizen C_i den Gleichungen

$$C_i C_k - C_k C_i = 0 \tag{34}$$

genügen, d. h. sie müssen vertauschbar sein. Für zwei vertauschbare Matrizen A und B gilt

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B;$$

das ergibt sich genau wie für Zahlen. Die Gleichung (34), d. i. die Vertauschbarkeit der infinitesimalen Elemente, genügt also, wie das eigentlich selbstverständlich ist, um den Abelschen Charakter der ganzen Gruppe sicherzustellen, es gilt auf Grund von (34)

$$U(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_f) U(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_f) = U(\sigma_1 + \tau_1, \sigma_2 + \tau_2, \dots, \sigma_f + \tau_f).$$

Jede f -parametrische Abelsche Gruppe ist danach isomorph mit der Gruppe der Translationen in einem f -dimensionalen Raume. Die C_i spielen eine analoge Rolle wie die Basis bei den endlichen Abelschen Gruppen.

Wir werden es zwar mit einer Abelschen Gruppe zu tun haben, aber die Abbildungen sind als solche des Strahlenkörpers zu verstehen. Überall ist das Zeichen $=$ zwischen unitären Abbildungen durch \simeq zu ersetzen. An Stelle der Bedingungen (34) treten danach solche von der Form

$$C_\mu C_\nu - C_\nu C_\mu = i c_{\mu\nu} \mathbf{1}.$$

$c_{\mu\nu}$ ist ein schiefsymmetrisches System reeller Zahlen. Der Kommutator der infinitesimalen Abbildungen mit den Matrizen

$$A = \sigma_1 C_1 + \dots + \sigma_f C_f \quad \text{und} \quad B = \tau_1 C_1 + \dots + \tau_f C_f$$

ist

$$AB - BA = i \sum_{\mu, \nu} c_{\mu\nu} \sigma_\mu \tau_\nu \cdot \mathbf{1}.$$

* Genaueres ist etwa nachzulesen bei: H. Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems, Berlin 1923, S. 33—36, und die dazu gehörigen Anhänge.

Die schiefsymmetrische Form

$$\sum_{\mu, \nu} c_{\mu \nu} \sigma_{\mu} \tau_{\nu} = h(\sigma, \tau),$$

welche eine von der Basis unabhängige Bedeutung hat, nenne ich die Kommutatorform. Wendet man (26) an für eine gegen ∞ konvergierende Zahl $k = l = m$ und $1 + \frac{A}{m}$, $1 + \frac{B}{m}$ an Stelle von A und B , so erhält man im Limes als den Kommutator irgend zweier Elemente der Gruppe $U(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_f) = U(\sigma)$ und $U(\tau)$:

$$U(\sigma) U(\tau) U^{-1}(\sigma) U^{-1}(\tau) = e(h(\sigma, \tau)) \cdot \mathbf{1}. \quad (35)$$

[Um der Leserlichkeit willen schreibe ich oft $e(x)$ statt e^{ix} .] Dieselbe Einsetzung in (27) mit nachfolgendem Grenzübergang liefert noch

$$U(\sigma + \tau) = e\left(\frac{1}{2} h(\sigma, \tau)\right) U(\tau) U(\sigma) = e\left(-\frac{1}{2} h(\sigma, \tau)\right) U(\sigma) U(\tau).$$

Wenn die Drehungsgruppe irreduzibel ist, kann ein festes $U(\sigma)$ nur dann mit allen $U(\tau)$ vertauschbar sein, wenn es $\simeq 1$ ist, d. h. wenn die Parameter σ_i verschwinden. Das besagt, daß die Kommutatorform nicht-ausgeartet ist, nämlich für ein festes Wertesystem σ_i nicht identisch in τ_i verschwinden kann, ohne daß alle $\sigma_i = 0$ sind. (Es kommt das darauf hinaus, daß die Determinante $|c_{ik}| \neq 0$ ist.) Eine solche Form existiert nur, wenn die Variablenzahl f gerade ist, und ihr kann durch geeignete Wahl der Basis (dadurch, daß die Variablen σ_i und τ_i kogredient einer geeigneten linearen Transformation unterworfen werden) eine numerisch eindeutig bestimmte Gestalt verliehen werden: Die Koeffizientenmatrix $\|c_{ik}\|$ zerfällt in lauter zweireihige Quadrate $\left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right\|$, die sich längs der Hauptdiagonale aneinanderreihen. Es ist dann zweckmäßiger, $2f$ an Stelle von f zu schreiben, die so eingeführte „kanonische Basis“ mit

$$i P_{\nu}, i Q_{\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, f)$$

zu bezeichnen und die zugehörigen kanonisch gepaarten Parameter mit σ_{ν}, τ_{ν} . Der Faktor i ist beigefügt, um auf Hermitesche Formen P_{ν}, Q_{ν} zu kommen. Es gelten die Vertauschungsrelationen

$$\left. \begin{array}{l} i(P_{\nu} Q_{\nu} - Q_{\nu} P_{\nu}) = 1, \quad i(P_{\mu} Q_{\nu} - Q_{\nu} P_{\mu}) = 0 \text{ für } \mu \neq \nu, \\ \text{und} \\ P_{\mu} P_{\nu} - P_{\nu} P_{\mu} = 0, \quad Q_{\mu} Q_{\nu} - Q_{\nu} Q_{\mu} = 0 \text{ für alle } \mu, \nu. \end{array} \right\} (36)$$

Die

$$U(\sigma) = e(\sigma_1 P_1 + \sigma_2 P_2 + \dots + \sigma_f P_f)$$

bilden für sich eine f -parametrische Abelsche Gruppe unitärer (Vektor-) Abbildungen, ebenso die

$$V(\tau) = e(\tau_1 Q_1 + \tau_2 Q_2 + \dots + \tau_f Q_f).$$

Hingegen ist

$$U(\sigma) V(\tau) U^{-1}(\sigma) V^{-1}(\tau) = e(\sigma_1 \tau_1 + \dots + \sigma_f \tau_f) \cdot \mathbf{1}$$

und

$$\begin{aligned} & e(\sigma_1 P_1 + \dots + \sigma_f P_f + \tau_1 Q_1 + \dots + \tau_f Q_f) \\ &= e\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^f \sigma_i \tau_i\right) V(\tau) U(\sigma) = e\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^f \sigma_i \tau_i\right) U(\sigma) V(\tau). \end{aligned} \quad (37)$$

§ 7. Ersatz der kanonischen Variablen durch die Gruppe. Das Elektron. Unsere Entwicklungen sind bis zu dem Punkte gediehen, wo die Verbindung mit der Quantenmechanik in die Augen springt. Liegt ein mechanisches System von f Freiheitsgraden vor, so genügen ja die Hermiteschen Matrizen, welche die kanonischen Variablen repräsentieren, gerade den Relationen (36), bis auf den Faktor $h/2\pi$, von dem noch die Rede sein wird und den wir einstweilen in die Maßeinheiten hineinstecken. Nehmen wir die Zahl der Freiheitsgrade f zunächst $= 1$ und bezeichnen in der üblichen Weise die kanonischen Variablen mit p, q , ihre repräsentierenden Formen mit P, Q , so sagt die Relation

$$i(PQ - QP) = \mathbf{1} \quad (38)$$

aus, daß die beiden durch die Matrizen iP, iQ gekennzeichneten infinitesimalen Drehungen des Strahlenkörpers vertauschbar sind. Die durch sie erzeugte Abelsche Drehungsgruppe besteht aus den Drehungen

$$U(\sigma, \tau) = e(P\sigma + Q\tau) \quad (39)$$

(σ, τ reelle Parameter, die sich bei Zusammensetzung additiv verhalten). Die reelle Größe im Gruppengebiet, deren Komponenten $\xi(\sigma, \tau)$ der Gleichung (19) oder

$$\bar{\xi}(\sigma, \tau) = \xi(-\sigma, -\tau) \quad (40)$$

genügen, erscheint als die Hermitesche Form

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e(P\sigma + Q\tau) \xi(\sigma, \tau) d\sigma d\tau. \quad (41)$$

Eine physikalische Größe ist durch ihren Funktionsausdruck $f(p, q)$ in den kanonischen Variablen p, q mathematisch definiert. Es blieb ein Problem, wie ein derartiger Ausdruck auf die Matrizen zu übertragen war. Ohne weiteres klar war das nur für die Potenzen p^k, q^l und damit für Polynome. Freilich trat schon hier die Schwierigkeit auf, daß man nicht wußte, ob man einen Term wie $p^2 q$ als $P^2 Q$ oder $Q P^2$ oder $P Q P$ usw.

zu interpretieren hatte. Der Ansatz ist offenbar viel zu formal. Unsere gruppentheoretische Auffassung zeigt sogleich den rechten Weg: die Hermitesche Form (41) repräsentiert die Größe

$$f(p, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e(p\sigma + q\tau) \xi(\sigma, \tau) d\sigma d\tau. \quad (42)$$

Nach dem Fourierschen Integraltheorem läßt sich ja jede Funktion $f(p, q)$ in dieser Form eindeutig entwickeln, und wenn f eine reellwertige Funktion der reellen Veränderlichen p, q ist, genügt $\xi(\sigma, \tau)$ gerade der Bedingung (40). Die Integralentwicklung (42) ist nicht immer ganz wörtlich zu verstehen; das wesentliche ist nur, daß rechts eine lineare Kombination der $e(p\sigma + q\tau)$ steht, in denen σ und τ beliebige reelle Werte annehmen können. Wenn z. B. q eine zyklische Koordinate ist, die nur mod. 2π zu verstehen ist, so daß alle in Betracht kommenden Funktionen periodisch in q mit der Periode 2π sind, wird die Integration nach τ ersetzt werden müssen durch eine Summation über alle ganzen Zahlen τ ; wir haben dann den Fall einer gemischten kontinuierlich-diskreten Gruppe. Die Einschränkungen, denen $f(p, q)$ unterworfen sein muß, damit sie eine Entwicklung des Typus (42) gestattet, könnten noch Bedenken erregen. Nun wissen wir aber, daß es eigentlich gilt, $e(kf(p, q))$ so zu entwickeln (k irgend eine reelle Konstante), und in dieser Fassung läßt sich die Aufgabe nach neueren Untersuchungen von N. Wiener, Bochner und Hardy in zwingender Weise eindeutig erledigen*.

Die Übertragung auf f Freiheitsgrade liegt auf der Hand. Insbesondere sahen wir, wie aus der Forderung der Irreduzibilität im Falle der kontinuierlichen Gruppen die charakteristische kanonische Paarung entspringt. Für endliche Gruppen freilich existiert nicht ein so einheitliches Schema. Das ist im Einklang mit den physikalischen Tatsachen. Denn aus den Entwicklungen von P. Jordan** ging bereits hervor, daß beim magnetischen Elektron σ_y so gut wie σ_z als

* N. Wiener, On representations of functions by trigonometrical integrals, *Math. ZS.* **24**, 575, 1926; S. Bochner und G. H. Hardy, Note on two theorems of N. Wiener, *Journ. Lond. Math. Soc.* **1**, 240, 1926; S. Bochner, Darstellung reell variabler und analytischer Funktionen durch verallgemeinerte Fourier- und Laplaceintegrale, *Math. Ann.* **97**, 635, 1927; vgl. dazu ferner die von H. Bohr stammende Theorie der fastperiodischen Funktionen; am einfachsten bei H. Weyl, *Math. Ann.* **97**, 338, 1926.

** *ZS. f. Phys.* **44**, 21—25, 1927. Nach P. Jordan, Über die Polarisation der Lichtquanten, ebenda, S. 292, ist die Kinematik der Lichtquanten die gleiche.

die „kanonische Konjugierte“ von σ_x angesehen werden kann. Höchstens von einem Tripel, nicht von einem Paar kanonisch konjugierter Größen könnte hier vernünftigerweise die Rede sein. Bestätigen wir, daß gerade auch in diesem diskreten, dem Kontinuierlichen am meisten entgegengesetzten Falle unsere Formulierung genau das Richtige trifft! Sie lautet, um das noch einmal zusammenzufassen, so: Der kinematische Charakter eines physikalischen Systems findet seinen Ausdruck in einer irreduziblen Abelschen Drehungsgruppe, deren Substrat der Strahlenkörper der „reinen Fälle“ ist. Die reellen Größen dieses Gruppengebietes sind die physikalischen Größen; die Hermiteschen Matrizen, als welche sie vermöge der Darstellung der abstrakten Gruppe durch Drehungen erscheinen, sind die Repräsentanten der physikalischen Größen, deren Bedeutung im I. Teil auseinandergesetzt wurde.

Nun: die früher beschriebene zweidimensionale Drehungsgruppe \mathfrak{B} , welche der Vierergruppe isomorph ist, kennzeichnet, wie der Vergleich mit § 2, (12) lehrt, die Kinematik des magnetischen Elektrons. Da $n = 2$ ist, sind alle Größen nur zweier Werte fähig. Die einzigen physikalischen Größen, welche existieren, sind die mit Hilfe reeller Zahlkoeffizienten gebildeten linearen Kombinationen von $1, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Aber das magnetische Elektron ergibt sich nicht nur als Sonderfall der Theorie, sondern die ihm eigentümliche Kinematik ist überhaupt die einzig mögliche, wenn alle Größen nur zweier Werte fähig sein sollen, wenn $n = 2$ ist. Beweis: Wir wissen schon, daß unter dieser Voraussetzung jedes Gruppenelement a außer dem Einheitsselement von der Ordnung 2 ist. Die beiden Eigenwerte der korrespondierenden zweidimensionalen Matrix A sind daher entgegengesetzt gleich. Wählen wir ein bestimmtes $a \neq 1$, so können wir das zugehörige A samt einem normalen Koordinatensystem so festlegen, daß

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (43)$$

wird. Die mit A vertauschbaren Matrizen U unserer Gruppe haben notwendig die Gestalt $\begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & c' \end{vmatrix}$; wenn sie nicht $\simeq 1$ sind, ist $c' = -c$, U also $\simeq A$. Es gibt Gruppenelemente, deren Matrix B nicht mit A vertauschbar ist. Wir wissen, daß in der Gleichung

$$AB = \varepsilon BA$$

ε eine zweite Einheitswurzel, darum $\varepsilon = -1$ sein muß. Daraus folgt, daß B die Gestalt

$$B = \begin{vmatrix} 0 & b \\ b' & 0 \end{vmatrix} \quad (44)$$

hat. Die Zahlen b, b' sind vom absoluten Betrag 1. Wir wählen ein bestimmtes solches B , das gemäß $B^2 = \mathbf{1}$ geeicht sei: $bb' = 1$. Außerdem kann man b zu 1 machen, indem man das bisherige normale Koordinatensystem e_1, e_2 durch $e_1, b e_2$ ersetzt; (43) wird dadurch nicht an-
gegriffen:

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (45)$$

Jede Matrix U unserer Gruppe, welche mit A vertauschbar ist, ist $\simeq \mathbf{1}$ oder $\simeq A$. Wenn sie nicht mit A vertauschbar ist, hat sie die Form (44), und demnach ist ihre Zusammensetzung UB mit dem durch (45) gegebenen bestimmten B eine Diagonalmatrix. Als solche ist sie mit A vertauschbar, also $\simeq \mathbf{1}$ oder $\simeq A$. Das Resultat ist, daß jedes $U \simeq$ einer von den vier Matrizen $\mathbf{1}, A, B, AB$ ist. Es liegt in der Tat die Vierergruppe vor und die Darstellung \mathfrak{B} derselben.

§ 8. Übergang zu Schrödingers Wellentheorie. In ähnlicher Weise, wie soeben der Fall $n = 2$ behandelt wurde, wollen wir jetzt zeigen, daß die zweiparametrischen kontinuierlichen Gruppen nur einer irreduziblen Darstellung in unserem Sinne (außer der identischen) fähig sind. Wir erhalten jene Gruppen durch Grenzübergang aus den zweibasigen endlichen. Die irreduzible Abelsche Drehungsgruppe mit der Basis A, B habe die Dimensionszahl n . In der Kommutatorgleichung

$$AB = \varepsilon BA \quad (46)$$

ist ε eine n -te Einheitswurzel. Diese Gleichung gilt es jetzt näher zu untersuchen. Die Kommutatorzahl ε sei eine primitive m -te Einheitswurzel, d. h. ε^m sei die niederste Potenz, welche $= 1$ ist; m ist Teiler von n . Die Drehungen A, B sind von einer in n aufgehenden Ordnung: $A^n \simeq \mathbf{1}, B^n \simeq \mathbf{1}$, und die Matrizen können daher so geeicht werden, daß $A^n = B^n = \mathbf{1}$ ist. Durch geeignete Wahl des normalen Koordinatensystems sei B auf Hauptachsen gebracht; die Glieder in der Hauptdiagonale, b_i , sind lauter n -te Einheitswurzeln. Die Gleichung (46) liefert für die Koeffizienten von $A = \|a_{ik}\|$:

$$\frac{b_k}{b_i} a_{ik} = \varepsilon a_{ik}. \quad (47)$$

Man teile die Indizes i und zugehörigen Variablen x_i in Klassen nach dem Prinzip, daß i und k in dieselbe Klasse fallen, wenn der Quotient b_i/b_k eine m -te Einheitswurzel, eine Potenz von ε ist. Dies ist wirklich eine Klasseneinteilung, da mit b_i/b_k und b_k/b_l auch b_i/b_l Potenz von ε ist. Gemäß der Gleichung (47) ist $a_{ik} = 0$, wenn i und k zu verschiedenen Klassen gehören; die Matrix A zerfällt demnach in der gleichen Weise, wie die Indizes in Klassen zerfallen. Wegen der vorausgesetzten Irreduzibilität ist also nur eine Klasse vorhanden.

Nachdem dies erkannt ist, gehen wir zu einer feineren Klasseneinteilung über: jetzt sollen i und k nur dann zur selben Klasse gehören, wenn $b_i = b_k$ ist. Wir wählen willkürlich eine dieser Klassen, für welche $b_i = b$ ist, als die erste, lassen dann als zweite diejenige folgen, für die $b_i = \varepsilon b$ ist, darauf die dritte mit $b_i = \varepsilon^2 b, \dots$, die m -te mit $b_i = \varepsilon^{m-1} b$; die $(m + 1)$ -te Klasse: $b_i = \varepsilon^m b$, ist wieder die erste. In dieser Reihenfolge denken wir auch die Variablen angeschrieben und numeriert. Nach der Gleichung (47) sind in der Matrix A alle Felder (i, k) leer, $a_{ik} = 0$, deren Zeilen- und Spaltenindex i und k nicht zu zwei aufeinanderfolgenden Klassen gehören.

Die Matrix A hat daher das angedeutete Schema (Fig. 1), in welchem die nicht schraffierten Gebiete leer stehen und übrigens $m = 4$ angenommen wurde. In den schraffierten Gebieten stehen die „Teilmatrizen“ $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}$. Da A unitär ist, summieren sich die absoluten Quadrate der Glieder in jeder Zeile und in jeder Spalte zu 1. Infolgedessen gilt das gleiche für die Zeilen

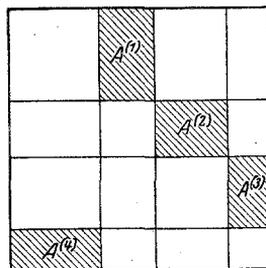


Fig. 1.

und Spalten der einzelnen Teilmatrix. Die Summe der absoluten Quadrate aller in $A^{(1)}$ stehenden Glieder ist darum einerseits gleich ihrer Zeilen-, andererseits gleich ihrer Spaltenzahl. Das Rechteck $A^{(1)}$ ist in Wahrheit ein Quadrat, die zweite Klasse besteht aus ebenso vielen Individuen d wie die erste. Alle Klassen sind gleich stark, $n = m d$. Danach ist die Figur zu korrigieren. Genauer ist jede der schraffierten Teilmatrizen für sich unitär. Indem wir auf die erste Klasse von Variablen die unitäre Transformation mit der Matrix $A^{(1)}$ ausüben, bewirken wir, daß sich $A^{(1)}$ in die d -dimensionale Einheitsmatrix verwandelt. Diese Normalform wird nicht zerstört, wenn man nachträglich die Variablen der ersten Klasse und ebenso die Variablen der zweiten Klasse, jede für sich, der gleichen beliebigen unitären Transformation unterwirft. Dies

können wir dazu benutzen, um auch die zweite Teilmatrix in die Einheitsmatrix umzuwandeln; und so fort bis zur $(m - 1)$ -ten. Die damit erzielte Normalform wird nicht zerstört, wenn die Variablen jeder Klasse untereinander der gleichen unitären Transformation unterliegen. Diese Transformation kann man schließlich, wie man weiß, noch so bestimmen, daß die letzte Teilmatrix $A^{(m)}$ eine Diagonalmatrix wird. Nunmehr nehmen wir eine Ummumerierung vor, indem wir zunächst aus jeder Klasse das erste Glied auslesen, darauf aus jeder Klasse das zweite usw. Dann zerfällt A in d Teilmatrizen, die sich längs der Hauptdiagonale aneinanderreihen. Wegen der vorausgesetzten Irreduzibilität ist nur eine davon vorhanden: $d = 1$, $n = m$. Wir haben die Normalform (die nicht ausgefüllten Felder „stehen leer“):

$$A = \left\| \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ \dots & \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \end{array} \right\|, \quad B = \left\| \begin{array}{cccccccc} \varepsilon^r & & & & & & & \\ & \varepsilon^{r+1} & & & & & & \\ & & \varepsilon^{r+2} & & & & & \\ \dots & \\ & & & & & & \varepsilon^{n+r-1} & \end{array} \right\|.$$

Die Exponenten in B sind n aufeinanderfolgende ganze Zahlen, ε ist eine primitive n -te Einheitswurzel. Die Gleichung $A^n = 1$ liefert endlich noch $a = 1$. Lassen wir die Variablennummern von r ab laufen und verstehen alle Indizes mod. n , so lauten die beiden Abbildungen:

$$A: x'_k = x_{k-1}, \quad B: x'_k = \varepsilon^k x_k.$$

Daraus sofort die Wiederholungen:

$$A^s: x'_k = x_{k-s}, \quad B^t: x'_k = \varepsilon^{kt} x_k. \quad (48)$$

Jetzt läßt sich in aller Strenge der Grenzübergang zu kontinuierlichen Gruppen vollziehen. Es sei (39) die kontinuierliche zweiparametrische irreduzible Abelsche Drehungsgruppe. Die Basis iP , iQ sei nach (38) normiert. Wir identifizieren in unserer Betrachtung A mit dem infinitesimalen $e(\xi P)$, B mit $e(\eta Q)$, ξ und η reelle infinitesimale Konstanten. Es ist $e(\sigma P) = A^s$, $e(\tau Q) = B^t$, wenn im Limes $s\xi = \sigma$, $t\eta = \tau$ wird. ε fällt mit $e(\xi\eta)$ zusammen, ε^{kt} ist $= e(\xi k\tau)$. $e(\tau Q)$ ist die Repräsentation der physikalischen Größe $e^{i\tau q}$; diese ist also (bei beliebigem reellen τ) der Werte fähig $e^{i\tau \xi k}$, wo k die ganzen Zahlen durchläuft. Mit anderen Worten: die Größe q ist der Werte $k\xi$ fähig, ihr Wertebereich das zusammenhängende Kontinuum der reellen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$. (Dabei ist k freilich mod. n , $k\xi$ mod. $n\xi$ zu verstehen; aber $n\xi$ ist ein Multiplum von $2\pi/\eta$, folglich im Limes unendlich groß.) Darum schreiben wir jetzt q an Stelle von $k\xi$, unter

q zugleich eine Variable verstehend, welche den Wertbereich der physikalischen Größe q durchläuft, und $\sqrt{\xi}$. $\psi(q)$ an Stelle von x_k . $\psi(q)$ ist eine willkürliche komplexwertige Funktion, welche der Normierungsgleichung

$$\int |\psi(q)|^2 dq = 1 \tag{49}$$

unterworfen ist. Ihre Werte sind aufzufassen als die den verschiedenen Werten von q entsprechenden Komponenten eines „reinen Falles“ in demjenigen normalen Koordinatensystem, das aus den Eigenvektoren der Größe q besteht. — An Stelle der zweiten Gleichung (48) erhalten wir im Limes

$$\psi' = \psi V_\tau: \quad \psi'(q) = e^{i\tau q} \cdot \psi(q): \tag{50}$$

das ist die unitäre Abbildung V_τ , welche die Größe $e^{i\tau q}$ darstellt. Der gleiche Grenzübergang an der ersten Gleichung liefert die unitäre Abbildung

$$\psi' = \psi U_\sigma: \quad \psi'(q) = \psi(q - \sigma), \tag{51}$$

welche $e^{i\sigma p}$ repräsentiert. Beide Abbildungen sind in der Tat unitär, weil sie die Gleichung (49) invariant lassen; sie bilden, den verschiedenen Werten von σ bzw. τ entsprechend, zwei einparametrische Abelsche Gruppen linearer Funktionaltransformationen:

$$U_{\sigma+\sigma'} = U_\sigma U_{\sigma'}, \quad V_{\tau+\tau'} = V_\tau V_{\tau'}.$$

$\psi U_\sigma V_\tau$ ist die Funktion $e^{i\tau q}$. $\psi(q - \sigma)$, $\psi V_\tau U_\sigma$ aber $= e^{i\tau(q-\sigma)}$. $\psi(q - \sigma)$, so daß, wie es sein muß, die Kommutatorgleichung gilt:

$$\psi U_\sigma V_\tau = e^{i\sigma\tau} \cdot \psi V_\tau U_\sigma.$$

Der Größe $e(i\sigma p + \tau q)$ entspricht nach (37) die Abbildung

$$\psi(q) \rightarrow \psi'(q) = e^{-1/2 i\sigma\tau} \cdot e^{i\tau q} \psi(q - \sigma).$$

Geht man endlich auf die infinitesimalen Operationen zurück — was freilich im allgemeinen nicht zweckmäßig ist —, so bekommt man als Repräsentation von

$$p: \quad \delta\psi = i \frac{d\psi(q)}{dq}, \quad \text{von} \quad q: \quad \delta\psi = q \cdot \psi(q). \tag{52}$$

Damit sind wir bei der Schrödingerschen Fassung angelangt. Die Eigenfunktionen $\psi_n(q)$ seiner Wellengleichung haben danach die Bedeutung, daß sie die unitäre Transformation angeben, welche zwischen den beiden Hauptachsensystemen der Größe q und der Energie E vermittelt. Im Hinblick auf den ersten Teil ergeben sich daraus die bekannten Paulischen Ansätze für ihre Wahrscheinlichkeitsbedeutung.

Die Übertragung auf mehrere Freiheitsgrade ist mühelos durchführbar. Die Kinematik eines Systems, die durch eine konti-

nuerliche Gruppe ausgedrückt wird, ist darum durch die Zahl der Freiheitsgrade f eindeutig determiniert. Unsere Behandlung ist gültig auch für den Fall, daß die Größe q eine zyklische Koordinate ist, die nur mod. 2π in Betracht kommt. Dann durchläuft τ nur die ganzen Zahlen, die Gruppe ist halb diskontinuierlich. Die Repräsentationen (50) und (51) von $e^{i\tau q}$ und $e^{i\sigma p}$ bleiben bestehen; aber da τ nur ganzzahlige Werte annimmt, hat es keinen Sinn mehr, den Grenzübergang $\tau \rightarrow 0$ zu vollziehen. Eine „physikalische Größe q “, welche durch eine Hermitesche Form zu repräsentieren wäre, gibt es überhaupt gar nicht, wohl aber z. B. $\cos q$.

Oft ist es zweckmäßig, Koordinaten und Impulse zu vertauschen, an Stelle der Komponenten $\psi(q)$ der Vektoren die Komponenten $\varphi(p)$ im System der Eigenvektoren von p zu verwenden. Ihr Zusammenhang ist der durch die „Fouriersche Transformation“

$$\psi(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqp} \varphi(p) dp$$

gegebene*. Denn die Abbildung V_τ verwandelt $\psi(q)$ in

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iq(p+\tau)} \varphi(p) dp = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqp} \varphi(p-\tau) dp,$$

U_σ aber in

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqp} \cdot e^{-i\sigma p} \varphi(p) dp.$$

Es ist also

$$\varphi(p) V_\tau = \varphi(p-\tau), \quad \varphi(p) U_\sigma = e^{-i\sigma p} \varphi(p). \quad (53)$$

III. Teil. Das dynamische Problem.

§ 9. Das Gesetz der zeitlichen Veränderung. Die Zeitgesamtheit. Die bisherigen Ansätze beanspruchen allgemeine Geltung. Nicht so günstig steht es mit dem dynamischen Problem, das eng mit der Frage nach der Rolle zusammenhängt, welche Raum und Zeit in der Quantenphysik spielen. In der Feldtheorie werden Zustandsgrößen behandelt, die in Raum und Zeit ausgebreitet sind, die Mechanik im engeren Sinne hat es nur mit der Zeit als der einzigen unabhängigen Veränderlichen zu tun. Die unabhängigen Veränderlichen sind keine

* Nach einem wichtigen Satz von Plancherel (Rend. Circ. Mat. Palermo **30**, 330, 1910) und Titchmarsh [Lond. Math. Soc. Proc. (2) **23**, 279, 1924] hat diese Transformation für alle absolut quadratisch integrierbaren Funktionen einen klaren Sinn und erhält (bis auf den Faktor 2π) das Quadratintegral.

gemessenen Größen, sie sind ein willkürlich in die Welt hineingetragenes gedachtes Koordinatenspinngewebe. Die Abhängigkeit einer physikalischen Größe von diesen Variablen ist also auch nicht etwas durch Messung zu Kontrollierendes; erst wenn mehrere physikalische Größen vorliegen, kommt man durch Elimination der unabhängigen Veränderlichen zu Beziehungen zwischen beobachtbaren Größen. Es mag sein, daß unter diesen Zustandsgrößen die Raumkoordinaten eines Elektrons auftreten; gemessener, real markierter Ort und natürlich auch real markierte Zeit sind Zustandsgrößen und werden also durch Hermiteschen Formen zu repräsentieren sein. Diesem Sachverhalt gegenüber ist die nicht-relativistische Mechanik in der glücklichen Lage, die Zeit als Zustandsgröße ignorieren zu können, während die Relativitätsmechanik parallel mit den meßbaren Raumkoordinaten auch die meßbaren Zeitkoordinaten der Teilchen benötigt. Eine vollständige Durchführung der Quantentheorie liegt bisher nur in dem Umfang vor, in welchem die Zeit als einzige unabhängige Variable und die Zeit nur als unabhängige Variable auftritt.

Da die Hermitesche Form, welche zu einer physikalischen Größe gehört, nichts zu tun hat mit besonderen Werten, welche die Größe unter Umständen, insbesondere im Laufe der Zeit annimmt, bleibt sie von der Zeit unberührt. Was sich im Laufe der Zeit t ändert, ist allein der reine Fall $\chi(t)$. Das dynamische Gesetz gibt die infinitesimale Verschiebung an, die $\chi(t)$ während des Zeitelements dt erfährt:

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{2\pi i}{h} \cdot \chi E. \tag{54}$$

Hier ist iE die infinitesimale unitäre Abbildung, welche mit der die Energie repräsentierenden Hermiteschen Form E gekoppelt ist, h das Wirkungsquantum. Die mit dem Vorrücken der Zeit um dt verbundene Änderung $A(\chi + d\chi) - A(\chi)$ irgend einer Hermiteschen Form $A(\chi)$ ist, wie man leicht ausrechnet,

$$dA = \frac{2\pi i dt}{h} (EA - AE). \tag{55}$$

dE ist $= 0$. Bringt man die Hermitesche Form E der Energie auf Hauptachsen:

$$E(\chi) = E_1 x_1 \bar{x}_1 + E_2 x_2 \bar{x}_2 + \dots + E_n x_n \bar{x}_n,$$

so bezeichnen die Nummern 1 bis n die möglichen Quantenzustände, E_i die zugehörigen Energiestufen, und in den Gleichungen (54) separieren sich die Variablen:

$$\frac{dx_v}{dt} = \frac{2\pi i E_v}{h} x_v.$$

Die Integration läßt sich sofort ausführen:

$$x_\nu(t) = x_\nu \cdot e\left(\frac{2\pi t E_\nu}{h}\right). \quad (56)$$

Die Hermitesche Form

$$A(x) = \sum a_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu$$

ist nach Ablauf der Zeit t übergegangen in

$$\sum a_{\mu\nu} x_\mu(t) \bar{x}_\nu(t) = \sum a_{\mu\nu}(t) x_\mu \bar{x}_\nu$$

mit

$$a_{\mu\nu}(t) = a_{\mu\nu} \cdot e\left(\frac{2\pi t (E_\mu - E_\nu)}{h}\right).$$

Die Komponenten $a_{\mu\nu}$ im Hauptachsensystem der Energie führen also einfache Schwingungen aus mit den Bohrschen Frequenzen. Nach (56) bleiben nicht nur die Energiestufen E_ν während der Bewegung erhalten, sondern auch die Häufigkeiten $|x_\nu(t)|^2 = |x_\nu|^2$, mit denen sie vertreten sind.

Das bisher Gesagte gilt für ein abgeschlossenes System. Wenn man innerhalb eines abgeschlossenen Systems ein Teilsystem ins Auge faßt, das unter dem Einfluß des Restes steht, dessen Rückwirkung auf den Rest aber vernachlässigt wird, so hat man den Fall der von außen eingepprägten Kräfte: die Hamiltonsche Funktion hängt explizite von der Zeit ab. Die Hermiteschen Formen, welche die Energie und andere Größen α am System darstellen, sind Funktionen der Zeit: $A = A(t; x)$. Das Gesetz der zeitlichen Verschiebung des reinen Falles $x(t)$ bleibt das gleiche. Die Formel (31) in § 6 gestattet die integrale Aneinanderreihung der von Schritt zu Schritt in der Zeit sich vollziehenden infinitesimalen Drehungen (54). So berechne man die Drehung $U(t_1, t_2)$, welche von $x(t_1)$ zu $x(t_2)$ führt. Findet die Einwirkung von außen nur in dem Zeitintervall t_1, t_2 statt, während vor t_1 und nach t_2 das System abgeschlossen ist, so entnimmt man der Matrix $U(t_1, t_2)$ insbesondere, wie sich die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Energiestufen E_μ durch die Einwirkung verschoben haben. Darauf bezieht sich die Untersuchung von M. Born über das Adiabatenprinzip in der Quantenmechanik*.

Wenn die Zeit nicht meßbare Größe, sondern nur unabhängige Variable ist, haben nur solche Beziehungen konkrete Bedeutung, aus denen die Zeit eliminiert ist. Tatbestände von diesem Charakter sind in der Quantenmechanik eines abgeschlossenen Systems: der Wertevorrat, welchen eine gegebene Größe durchlaufen kann, und die zeitlichen Mittelwerte der Wahrscheinlichkeiten $W(x)$, mit denen eine gegebene

* ZS. f. Phys. 40, 167, 1927.

Größe Werte in gegebenen Grenzen annimmt. Handelt es sich um den reinen Fall

$$\chi: \quad x_\nu = c_\nu e(\gamma_\nu) \quad (c_\nu \geq 0, \gamma_\nu \text{ reell}),$$

so durchläuft $\chi(t)$ nach (56), wenn die Energiestufen nicht speziellen linearen Rationalitätsbeziehungen genügen, gleichmäßig dicht das ganze durch

$$|x_1| = c_1, \quad |x_2| = c_2, \quad \dots, \quad |x_n| = c_n$$

definierte Gebilde \mathfrak{H} von n reellen Dimensionen. In den Ausnahmefällen reduziert sich die Dimensionszahl*. Zur Berechnung der zeitlichen Mittelwerte ist über dieses gleichmäßig dicht von der Zeitkurve erfüllte Gebiet \mathfrak{H} , die „Zeitgesamtheit“, zu integrieren.

Ich erinnere noch kurz an die Beziehung der Energie und der Hamiltonschen Gleichungen zu den kanonischen Variablen. Hat das mechanische System einen Freiheitsgrad und ist eine Funktion (42) der kanonischen Variablen p, q repräsentiert durch die Matrix (41), so sind gemäß unserer Festsetzung die beiden Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial p} = f_p, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = f_q$ repräsentiert durch

$$F_p = i \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e(\sigma P + \tau Q) \cdot \sigma \xi(\sigma, \tau) d\sigma d\tau,$$

$$F_q = i \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e(\sigma P + \tau Q) \cdot \tau \xi(\sigma, \tau) d\sigma d\tau,$$

da entsprechende Fourierentwicklungen für f_p und f_q gelten. Wegen (38) ergibt die Kommutatorregel (35), wenn man $U(\tau)$ wieder infinitesimal werden läßt, die beiden Gleichungen

$$P \cdot e(\sigma P + \tau Q) - e(\sigma P + \tau Q) \cdot P = \tau \cdot e(\sigma P + \tau Q),$$

$$Q \cdot e(\sigma P + \tau Q) - e(\sigma P + \tau Q) \cdot Q = -\sigma \cdot e(\sigma P + \tau Q),$$

also

$$-F_p = i(QF - FQ), \quad F_q = i(PF - FP).$$

Das dynamische Gesetz (54) läßt sich daher, wenn $f(p, q)$ die Energiefunktion ist, nach (55) so fassen:

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{2\pi}{h} \cdot F_q, \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi}{h} \cdot F_p.$$

Daraus sieht man: wenn a und b zwei reelle Zahlen vom Produkt $h/2\pi$ sind, repräsentieren aP und bQ Größen, welche kanonisch sind in

* Vgl. H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann. 77, 313, 1916.

dem Sinne, daß für sie die klassischen Bewegungsgleichungen gelten. Auf diese Weise wird in konkreten Beispielen die Bestimmung der Energie als Größe im Gruppengebiet durchgeführt. Bei solcher Beschreibung kommt das Wirkungsquantum nur einmal vor: in dem dynamischen Gesetz und nicht in den Vertauschungsrelationen. Sie basiert auf der Überzeugung, daß die formalen Beziehungen der klassischen Physik als solche zwischen den repräsentierenden Matrizen, nicht zwischen den angenommenen Werten, bestehen bleiben.

Will man den gerügten Mangel des Zeitbegriffs der alten vor-relativistischen Mechanik aufheben, so werden die meßbaren Größen: Zeit t und Energie E , als ein weiteres kanonisch konjugiertes Paar auftreten, wie ja bereits das Wirkungsprinzip der analytischen Mechanik erkennen läßt; das dynamische Gesetz kommt ganz in Fortfall. Die Behandlung eines Elektrons im elektromagnetischen Felde nach der Relativitätstheorie durch Schrödinger u. a. entspricht bereits diesem Standpunkt*. Eine allgemeine Formulierung liegt noch nicht vor.

§ 10. Kinetische Energie und Coulombsche Kraft in der relativistischen Quantenmechanik. Innerhalb des Schemas, das die Zeit nur als unabhängige Variable kennt, ist wenigstens eine halb-relativistische Mechanik möglich, welche den richtigen Ausdruck für die kinetische Energie verwendet, aber die potentielle Energie nach wie vor als eine Funktion der Lagekoordinaten, und das heißt doch genauer: ihrer simultanen Werte, annimmt. Zur Illustration der Theorie behandle ich den Fall eines oder mehrerer Teilchen, deren Lage durch ihre rechtwinkligen Koordinaten x, y, z gekennzeichnet wird. Der Ausdruck der kinetischen Energie in den zugehörigen Impulsen u, v, w lautet, wenn m die Masse des Teilchens bedeutet und c die Lichtgeschwindigkeit:

$$c \sqrt{m^2 c^2 + u^2 + v^2 + w^2}.$$

Für die Durchrechnung ist es zweckmäßig, die Koordinaten und Impulse des Teilchens auf die Maßeinheiten $\frac{h}{2\pi mc}$ bzw. mc zu beziehen; dann sind sie dimensionslose Größen und zugleich mit der von uns befürworteten Normierung der kanonischen Koordinaten in Einklang. Es handelt sich darum, die Abbildung oder Hermitesche Form zu konstruieren, welche dieser Größe entspricht im Raume der Funktionen $\psi(x, y, z)$. Als Musterbeispiel diene der eindimensionale Fall. Es ist

* Siehe etwa E. Schrödinger, Abhandlungen zur Wellenmechanik, Leipzig 1927, S. 163, = Ann. d. Phys. (4) 81, 133, 1926.

die Fourierzerlegung von $\sqrt{1+u^2}$ vorzunehmen. Im Sinne früherer Bemerkungen hat man diese Funktion zunächst etwa durch

$$e^{-\alpha|u|}\sqrt{1+u^2} \tag{57}$$

zu ersetzen mit einem kleinen positiven α und dann α gegen 0 konvergieren zu lassen. Setzen wir

$$\frac{1}{\pi} \Re \int_0^\infty e^{-\alpha u} \sqrt{1+u^2} e^{-i\sigma u} du = G_\alpha(\sigma), \tag{58}$$

so ist die der Größe (57) korrespondierende Abbildung

$$\psi(x) \rightarrow \psi'_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-\sigma) G_\alpha(\sigma) d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\alpha(x-\xi) \psi(\xi) d\xi, \tag{59}$$

die Hermitesche Form der willkürlichen Funktion $\psi(x)$ lautet:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_\alpha(x-\xi) \psi(x) \bar{\psi}(\xi) dx d\xi.$$

Um an der geraden Funktion $G_\alpha(\sigma)$ für $\sigma > 0$ den Grenzübergang zu $\alpha = 0$ zu vollziehen, schlagen wir in dem Integral, von dem $\pi G_\alpha(\sigma)$ nach (58) der Realteil ist, den Integrationsweg in die negative imaginäre Halbachse hinüber: $u = -it$, indem wir die Singularität $u = -i$ nach rechts hin umgehen:

$$-i \int_0^1 e^{-(\sigma-i\alpha)t} \sqrt{1-t^2} dt - \int_1^\infty e^{-(\sigma-i\alpha)t} \sqrt{t^2-1} dt. \tag{60}$$

Im Limes für $\alpha = 0$ ist der Realteil also

$$G(\sigma) = -\frac{1}{\pi} \int_1^\infty e^{-\sigma t} \sqrt{t^2-1} dt \quad (\sigma > 0).$$

Daraus liest man sofort ab, daß

$$-G(\sigma) = \frac{1}{\pi\sigma^2} - \Gamma(\sigma)$$

ist, wo Γ für $\sigma = 0$ nur noch logarithmisch unendlich wird. In (59) macht der Grenzübergang zu $\alpha = 0$ an dem Γ -Teil keine Schwierigkeit. In (60) ist der erste Summand bei $\alpha + i\sigma = 0$ regulär, der zweite hängt eng mit derjenigen Hankelschen Zylinderfunktion erster Ordnung H zusammen, die mit positiv wachsendem σ exponentiell zu 0 geht; er ist

nämlich $= \frac{H(\alpha + i\sigma)}{\alpha + i\sigma}$. Darum ist bis auf einen additiv hinzutretenden Teil, der an der kritischen Stelle $\alpha + i\sigma = 0$ nur logarithmisch unendlich wird,

$$G_\alpha(\sigma) \sim -\frac{1}{\pi} \Re \frac{1}{(\sigma - i\alpha)^2}.$$

So kommt als Repräsentation der kinetischen Energie die Operation

$$\begin{aligned} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) &= \psi^*(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x - \xi) \psi(\xi) d\xi, \\ -\psi^*(x) &= \lim_{z \rightarrow x} \Re \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\xi) d\xi}{(z - \xi)^2} \end{aligned} \quad (61)$$

(der Einfachheit halber ist ψ reell angenommen). Der Grenzübergang ist so zu verstehen, daß z komplex $= x + iy$ ist mit positivem Imaginärteil y und y zu 0 strebt. Das in der letzten Gleichung hinter dem Zeichen \Re stehende Integral ist das i -fache der Ableitung derjenigen analytischen Funktion in der oberen Halbebene $y > 0$, deren Realteil ψ auf der reellen Achse mit unserem $\psi(x)$ zusammenfällt. — $\psi^*(x)$ ist demnach die nach der inneren Normale n genommene Ableitung $\frac{d\psi}{dn}$ dieser Potentialfunktion am Rande. Da das über den Rand erstreckte Integral von $-\psi \frac{d\psi}{dn}$ nichts anderes ist als das Dirichletsche Integral $D(\psi)$ über die obere Halbebene, haben wir schließlich als die der Größe $\sqrt{1 + u^2}$ zugehörige Hermitesche Form:

$$D(\psi) + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x - \xi) \psi(x) \psi(\xi) dx d\xi.$$

Wenn es sich um ein einzelnes Teilchen handelt und eine (in der Einheit mc^2 gemessene) potentielle Energie $V(x)$ da ist, besteht das Eigenwertproblem darin,

$$D(\psi) + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x - \xi) \psi(x) \psi(\xi) dx d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) \psi^2(x) dx$$

zum Extremum zu machen unter der Nebenbedingung $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2 dx = 1$. Die Extremalwerte λ sind die Energiestufen.

Es ist klar, daß die Operation (61), wenn sie zweimal ausgeführt wird, zu derjenigen führen muß, die $1 + u^2$ korrespondiert, d. i. zu $\psi(x) + \frac{d^2\psi}{dx^2}$. Deshalb kann die Schwingungsgleichung für das einzelne Teilchen auch in der Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung angeschrieben werden:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \psi(x) = (\lambda - V(x))\psi(x).$$

Aber hier tritt der Eigenwertparameter λ nicht mehr in linearer Weise auf, und die Hälfte der Eigenwerte sind falsch. Auf solchem Wege gelang es Schrödinger und P. Epstein, die Energiestufen und Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms relativistisch zu berechnen*. Wenn aber mehrere Teilchen im Spiel sind, ist es unmöglich, durch Iteration zu Differentialgleichungen zu gelangen.

Wenn die wirkenden Kräfte Coulombsche Kräfte sind, die von einem festen Kern ausgehen, ist es zweckmäßig, die Komponenten φ der reinen Fälle im Hauptachsensystem der Impulskomponenten zu benutzen. Die kinetische Energie ist dann einfach repräsentiert durch die Multiplikation

$$\varphi \rightarrow \varphi': \varphi'(u, v, w) = \sqrt{1 + s^2} \cdot \varphi(u, v, w) \\ (s^2 = u^2 + v^2 + w^2).$$

Es gilt, die repräsentierende Hermitesche Form für das Potential $1/r$ ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$) zu finden. Aus Konvergenzgründen werde $1/r$ zunächst ersetzt durch $\frac{e^{-lr}}{r}$, wo l eine kleine positive Konstante ist.

Für das Integral in der Fourierzerlegung dieser Funktion

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-lr}}{r} e^{-i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} dx dy dz$$

findet man leicht durch Einführung von Polarkoordinaten

$$\frac{4\pi}{l^2 + \sigma^2} \quad (\sigma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

* E. Schrödinger, Abhandlungen zur Wellenmechanik, 1927, S. 164, = Ann. d. Phys. (4) 81, 134, 1926. P. S. Epstein, Two Remarks on Schrödinger's Quantum Theory, Proc. Amer. Nat. Acad. 13, 94, 1927.

Die gesuchte Abbildung ist also diejenige, welche $\varphi(u, v, w)$ verwandelt in

$$\left. \begin{aligned} P\varphi(u, v, w) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u + \alpha, v + \beta, w + \gamma) \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{\sigma^2} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma}{(u - \alpha)^2 + (v - \beta)^2 + (w - \gamma)^2} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty M_\sigma(\varphi) d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

In der letzten Gestalt bedeutet $M_\sigma(\varphi)$ den Mittelwert der Funktion φ auf der Kugel vom Radius σ um den Punkt (u, v, w) im Impulsraum. Behält man l zunächst noch bei, so tritt im Ausdruck (62) der Summand l^2 im Nenner hinzu. Die Funktion, die sich so ergibt, ist im vierdimensionalen Raum mit den Koordinaten u, v, w, l diejenige Potentialfunktion F , welche aus der Massenbelegung der „Ebene“ $l = 0$ mit der Dichte φ entsteht. $P\varphi$ sind ihre Werte auf der belegten Ebene. Da offenbar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{r_{10}^2 r_{20}^2} = \frac{\text{const}}{r_{12}}$$

ist, wo 1, 2, 0 = $(\alpha \beta \gamma)$ drei Punkte im Impulsraum bedeuten und r_{10} , r_{20} , r_{12} ihre gegenseitigen Abstände, liefert die Wiederholung P^2 von P den Prozeß, der im dreidimensionalen Impulsraum φ überführt in die durch die Raumbelegung φ erzeugte Potentialfunktion Φ . Es gilt bekanntlich

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial w^2} = \varphi.$$

Man wird nach Kugelfunktionen zerspalten. Benutzt man die oben erwähnte vierdimensionale harmonische Funktion F und macht den Ansatz

$$F = Y_n \cdot F(s, l),$$

in welchem Y_n eine nur von der Richtung $u:v:w$ abhängige Kugelfunktion n -ter Ordnung sein soll, so genügt im oberen Halbraum $l > 0$ der nur von s und l abhängige Faktor F der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(s^2 \frac{\partial F}{\partial s} \right) + s^2 \frac{\partial^2 F}{\partial l^2} = n(n+1)F,$$

und die Operation P bedeutet den Übergang von den Randwerten ihrer normalen Ableitung zu ihren eigenen Randwerten. Vielleicht ist es

bequemer, statt $F(s, l)$ die Funktion $sF(s, l) = F^*(s, l)$ zu benutzen. Für sie lautet die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 F^*}{\partial l^2} = \frac{n(n+1)}{s^2} F^*.$$

F^* ist eine Funktion in der oberen Hälfte $l > 0$ einer (s, l) -Ebene, welche bei Spiegelung an der l -Achse ungerade ist. — Indem man in (62) den Faktor $1/R^2$,

$$R^2 = (u - \alpha)^2 + (v - \beta)^2 + (w - \gamma)^2 = s^2 + \sigma^2 - 2s\sigma \cos \vartheta,$$

nach Kugelfunktionen $P_n(\cos \vartheta)$ entwickelt:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{4s\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) L_n \cdot P_n(\cos \vartheta),$$

erhält man, wenn analog

$$\varphi = Y_n \cdot s \varphi^*(s)$$

angesetzt wird, als Ausdruck der Operation \mathcal{P} an solchen Funktionen die Formel

$$\varphi^*(s) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} L_n \left(\frac{s^2 + \sigma^2}{2s\sigma} \right) \cdot \varphi^*(\sigma) d\sigma,$$

$$L_n(t) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x) dx}{t-x}.$$

Wenn das Einkörperproblem vorliegt, wird man, auf die Gefahr hin, eine Serie falscher Eigenwerte einzuschmuggeln, \mathcal{P} iterieren und dadurch zu einer reinen Differentialgleichung kommen. Für das nichtrelativistische Wasserstoffatom sind die Eigenfunktionen $\varphi_n(u, v, w)$, die durch die Fouriersche Transformation aus den Schrödingerschen Eigenfunktionen $\psi_n(x, y, z)$, den Laguerreschen Polynomen, hervorgehen, in meiner Dissertation angegeben*. Sie können auch sehr schön direkt auf dem hier skizzierten Wege gewonnen werden. Im Mehrkörperproblem versagt die Iterationsmethode.

Coulombsche Kräfte zwischen mehreren beweglichen Teilchen. Dem reziproken Abstand $1/r_{12}$ zweier Teilchen 1 und 2 entspricht im Gebiet der Impulsfunktionen $\varphi(u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2)$, wie man auf die gleiche Weise erkennt, die Abbildung

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u_1 + \alpha, v_1 + \beta, w_1 + \gamma; u_2 + \alpha, v_2 + \beta, w_2 + \gamma) \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

* Math. Ann. 66, 307—309, 317—324, 1908.

Die Bezeichnung soll natürlich nicht ausschließen, daß φ auch von den Impulsen der übrigen Teilchen abhängt, diese werden aber von der Transformation nicht mit betroffen.

Mathematischer Anhang.

Beweis des Satzes von der Hauptachsentransformation einer unitären Abbildung. Ist die unitäre Abbildung $A = \|a_{ik}\|$ gegeben, so bestimmen wir einen Vektor $\xi \neq 0$, der durch A in ein Multiplum von sich selber übergeht:

$$\xi A = \varepsilon \xi \quad \text{oder} \quad \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i = \varepsilon x_k. \quad (63)$$

Wählen wir ε als eine Wurzel der Säkulargleichung

$$\det(\varepsilon \mathbf{1} - A) = 0,$$

so existiert tatsächlich ein derartiger Vektor $\xi = e_1$. Indem wir seinen Betrag zu 1 normieren, ergänzen wir ihn durch weitere $n - 1$ Vektoren e_2, \dots, e_n zu einem normalen Koordinatensystem. Da in ihm die Gleichungen (63) für e_1 , d. i. für $x_1 = 1, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ erfüllt sind, ist jetzt

$$a_{11} = \varepsilon, a_{12} = \dots = a_{1n} = 0.$$

Die Quadratsumme der absoluten Beträge der ersten Koeffizientenzeile in A muß 1 sein, darum ist $|\varepsilon| = 1$. Aber auch die absolute Quadratsumme der Glieder, welche in der ersten Spalte stehen, ist $= 1$, und das liefert

$$1 + |a_{21}|^2 + \dots + |a_{n1}|^2 = 1, \quad a_{21} = \dots = a_{n1} = 0.$$

Das ist der entscheidende Schluß. Die Matrix A zerfällt nunmehr in der aus dem Schema ersichtlichen Weise:

$$\left\| \begin{array}{cccc} \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\|$$

Durch Induktion in bezug auf die Dimensionszahl n ist damit der Beweis vollendet.

Liegt die unitäre Abbildung A in der Normalform vor, mit den Termen a_i in der Hauptdiagonale, so genügen der Gleichung (63) offenbar alle und nur diejenigen Vektoren, welche sich aus Grundvektoren e_i zusammensetzen, für die $a_i = \varepsilon$ ist. Daraus geht hervor, daß die verschiedenen Eigenwerte a', a'', \dots mit ihrer Vielfachheit und die zu-

gehörigen Teilräume $\mathfrak{R}(a')$, $\mathfrak{R}(a'')$, ..., von denen in § 1 die Rede war, eindeutig durch A bestimmt sind.

Wenn $A = \|a_{ik}\|$, $B = \|b_{ik}\|$ vertauschbare unitäre Matrizen sind, lassen sie sich simultan auf Hauptachsen transformieren. Beweis: A kann sogleich in der Normalform angenommen werden, in welcher nur Glieder a_i in der Hauptdiagonale auftreten. Die Vertauschbarkeitsforderung besagt

$$(a_i - a_k) b_{ik} = 0. \quad (64)$$

Wir teilen die Indizes in Klassen, indem i und k in dieselbe Klasse kommen, wenn $a_i = a_k$ ist. Die Gleichung (64) zeigt, daß $b_{ik} = 0$ ist, wenn die Indizes i und k verschiedenen Klassen angehören; d. h. B zerfällt in der gleichen Weise in Teilmatrizen: B' , B'' , ..., die sich längs der Hauptdiagonale aneinanderreihen, wie sich die a_i in Klassen untereinander gleicher aufteilen: a' , a'' , ... Die Abbildung B läßt die zu den Eigenwerten a' , a'' , ... gehörigen Teilräume $\mathfrak{R}(a')$, $\mathfrak{R}(a'')$, ... einzeln invariant. Die Normalform von A wird nicht zerstört, wenn die Variablen, welche der gleichen Klasse angehören, untereinander unitär transformiert werden. Durch geeignete Wahl dieser einzelnen unitären Transformationen in den Räumen $\mathfrak{R}(a')$, $\mathfrak{R}(a'')$, ... können aber B' , B'' , ... auf die Normalform gebracht werden. — Das Verfahren ist ohne weiteres auf irgend eine kommutative Gesamtheit von unitären Matrizen zu übertragen.

Der Satz von der Hauptachsentransformation der Hermiteschen Formen ist ein Grenzfall des soeben bewiesenen, kann aber auch nach der gleichen Methode direkt abgeleitet werden. Der Schluß von

$$a_{12} = \dots = a_{1n} = 0 \quad \text{auf} \quad a_{21} = \dots = a_{n1} = 0$$

geschieht hier vermöge der Symmetriebedingung $a_{ki} = \bar{a}_{ik}$.

Beweis des Satzes, daß eine unitäre Abbildung A notwendig $= \varepsilon \mathbf{1}$ ist, wenn sie mit allen unitären Abbildungen eines gegebenen irreduziblen Systems \mathfrak{U} vertauschbar ist. Man führe dasjenige normale Koordinatensystem ein, in welchem A mit den Eigenwerten a_i zur Diagonalmatrix wird. Sind nicht alle a einander gleich, so zerfallen die sämtlichen Matrizen U der vorgegebenen Gesamtheit in der gleichen Weise, wie die a_i in Klassen untereinander gleicher zerfallen; A bewirkt dann einen simultanen Zerfall aller Matrizen des Systems \mathfrak{U} .

Den Satz über die lineare Transformation einer nicht-ausgearteten schiefsymmetrischen reellen Bilinearform

$$\sum_{i, k=1}^f c_{ik} x_i y_k \quad (c_{ki} = -c_{ik}) \quad (65)$$

beweist man so. Man fasse das einzelne Zahlensystem (x_1, x_2, \dots, x_f) als einen Vektor \mathfrak{x} auf und bezeichne (65) als das schiefe Produkt $[\mathfrak{x} \mathfrak{y}]$ der beiden Vektoren \mathfrak{x} und $\mathfrak{y} = (y_i)$. Man wähle einen Vektor $e_1 \neq 0$. Nach Voraussetzung ist $[e_1 \mathfrak{x}]$ nicht identisch in \mathfrak{x} gleich 0; ich kann also einen zweiten Vektor e_2 so finden, daß $[e_1 e_2] = 1$ ist. Die simultan zu erfüllenden Gleichungen

$$[e_1 \mathfrak{x}] = 0, \quad [e_2 \mathfrak{x}] = 0$$

haben mindestens $f - 2$ linear unabhängige Lösungen e_3, \dots, e_f . Auch zwischen ihnen und e_1, e_2 findet keine lineare Relation statt. Denn ist

$$\mathfrak{x} = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \dots + \xi_f e_f = 0,$$

so folgt durch Bildung der beiden schiefen Produkte $[e_1 \mathfrak{x}] = \xi_2$, $[e_2 \mathfrak{x}] = -\xi_1$, daß $\xi_1 = \xi_2 = 0$ wird. Man kann also e_1, e_2, \dots, e_f als Koordinatensystem, als Vektorenbasis verwenden. In den darauf bezüglichen Komponenten ξ_i, η_i der beiden Vektoren \mathfrak{x} und \mathfrak{y} laute das schiefe Produkt

$$[\mathfrak{x} \mathfrak{y}] = \sum_{i, k=1}^f \gamma_{ik} \xi_i \eta_k.$$

Gemäß der Bestimmung der Grundvektoren gilt für die Koeffizienten $\gamma_{ik} = [e_i e_k]$:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= 0, & \gamma_{12} &= 1; \gamma_{13} = 0, \dots, \gamma_{1f} = 0, \\ \gamma_{21} &= -1, & \gamma_{22} &= 0; \gamma_{23} = 0, \dots, \gamma_{2f} = 0. \end{aligned}$$

Wegen der schiefen Symmetrie sind infolgedessen auch alle γ_{i1}, γ_{i2} mit $i = 3, \dots, f$ gleich 0; und die Matrix der γ_{ik} zerfällt in das zwei-reihige Quadrat $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ und eine $(f - 2)$ -dimensionale schiefsymmetrische Matrix. Durch Induktion in bezug auf die Dimensionszahl f ergibt sich der behauptete Satz.